ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение

высшего образования

«Иркутский государственный университет путей сообщения»

Сибирский колледж транспорта и строительства

Методические указания по выполнению контрольной работы
по дисциплине ЕН.01 Математика
(заочной формы обучения)
для специальности
23.02.01 Организация перевозок и управление на транспорте (по видам)

Иркутск, 2024

РАССМОТРЕНО:
ЦМК математики, физики, географии,
биологии, химии
Председатель ЦМК:
Новикова Т.П./_______________
Протокол № 8
от «11» апреля 2024г

Составитель: Г.Г. Убоженко, преподаватель высшей категории, Сибирский колледж транспорта и строительства ФГБОУ ВО «Иркутский государственный университет путей сообщения».

Аннотация

В методических указаниях приведены рекомендации по изучению программного материала дисциплины ЕН.01 Математика, задания на контрольную работу и рекомендации по ее выполнению.

Методические материалы предназначены для оказания помощи студентам-заочникам в организации их самостоятельной работы над изучением дисциплины ЕН.01 Математика.

Методические указания разработаны в соответствии с рабочей программой дисциплины ЕН.01 Математика по специальности среднего профессионального образования 23.02.01 Организация перевозок и управление на транспорте (по видам) базовой подготовки для специальностей среднего профессионального образования.

Содержание

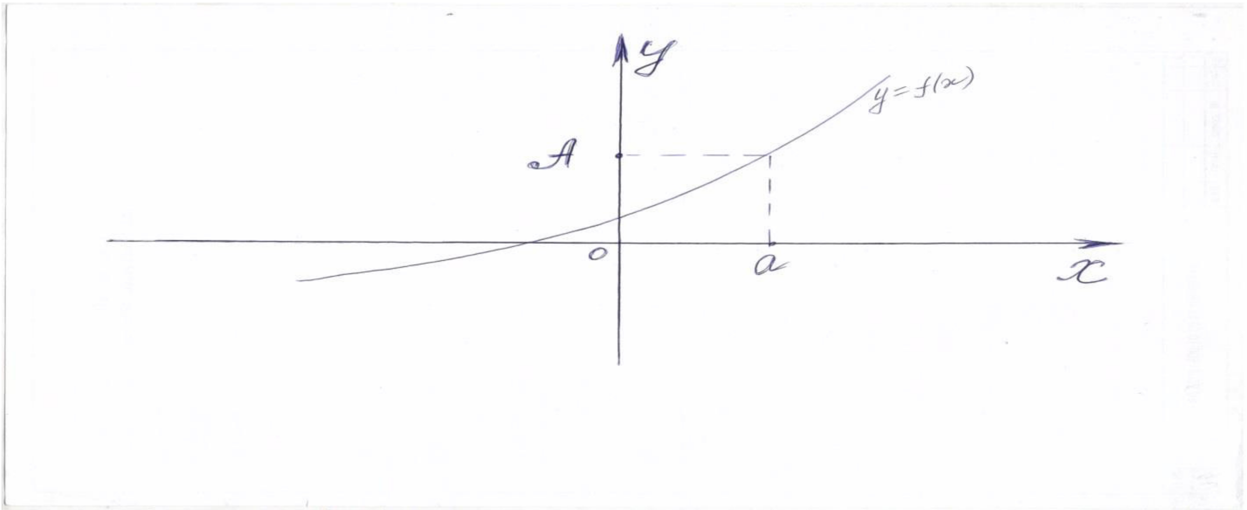
1.Основные понятия и методы математического анализа	4
1.1 Предел и непрерывность функции	4
1.2 Производная функции и ее применение	10
1.3 Неопределенный интеграл	17
1.4 Определенный интеграл и его применение	22
2. Элементы аналитической геометрии	31
3. Задания для контрольной работы	38
4. Литература	52

1.Основные понятия и методы математического анализа

1.1 Предел и непрерывность функции

1.1.1 Понятие предела

Рассмотрим функцию y = f(x) и ее график:



Видим, что если *x* будет принимать значения, близкие к числу *a*, то значения самой функции будут приближаться к числу *A*, то есть, в нашем случае, *a* будет являться пределом для *x*, тогда число *A* будет пределом для функции f(x).

Дадим определение:

Число ***A*** называется **пределом функции y = f(x)**, если при неограниченном приближении *x* к числу *a*, значения функции мало чем отличаются от числа *A*.

Обозначаем: $\mathbf{\lim_{x \to a} f(x) = A}$

<u>Предел функции будет зависеть от предельного значения x!!!</u>

1.1.2 Вычисление пределов

Свойства пределов

1. $\lim(u \pm v) = \lim u \pm \lim v$

2. $\lim(u \cdot v) = \lim u \cdot \lim v$

3. lim a = a (где a – это число)

4. $\lim (a \cdot u) = a \cdot \lim u$

5. $\lim \frac{u}{v} = \frac{\lim u}{\lim v}$, $\lim v \neq 0$

6. $\lim u^n = (\lim u)^n$

Пусть дана функция $y = 3x^5 - 2x + 1$. Найдем ее предел при $x \to -2$

1. *<u>Способ (по свойствам):</u>*

$\lim_{x \to -2}(3x^5 - 2x + 1) = 3 \cdot (\lim_{x \to -2} x)^5 - 2 \cdot \lim_{x \to -2} x + \lim_{x \to -2} 1 = 3 \cdot (-2)^5 - 2(-2) + 1 = -96 + 4 + 1 = -91$

2. *Способ (непосредственный):*

Чтобы вычислить предел функции y = f(x), подставим в формулу функции предельное значение *x*.

$\lim_{x\to -2}(3x^5 - 2x + 1) = = 3\cdot(-2)^5 - 2(-2) + 1 = -96 + 4 + 1 = -91$

Так как непосредственный способ наиболее простой, договоримся, что вычислять любой предел всегда будем пытаться непосредственно!

1.1.3 Бесконечно большие и бесконечно малые величины

Определение: Величина называется **бесконечно большой**, если ее предела не существует. Факт отсутствия предела записываем с помощью символа ∞

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$$

Пример 1: Найти предел функции $y = \frac{x^2-2}{5}$, при $x \to \infty$

Решение: $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2}{5} = \frac{\infty^2-9}{5} = \frac{\infty-9}{5} = \frac{\infty}{5} = \infty$

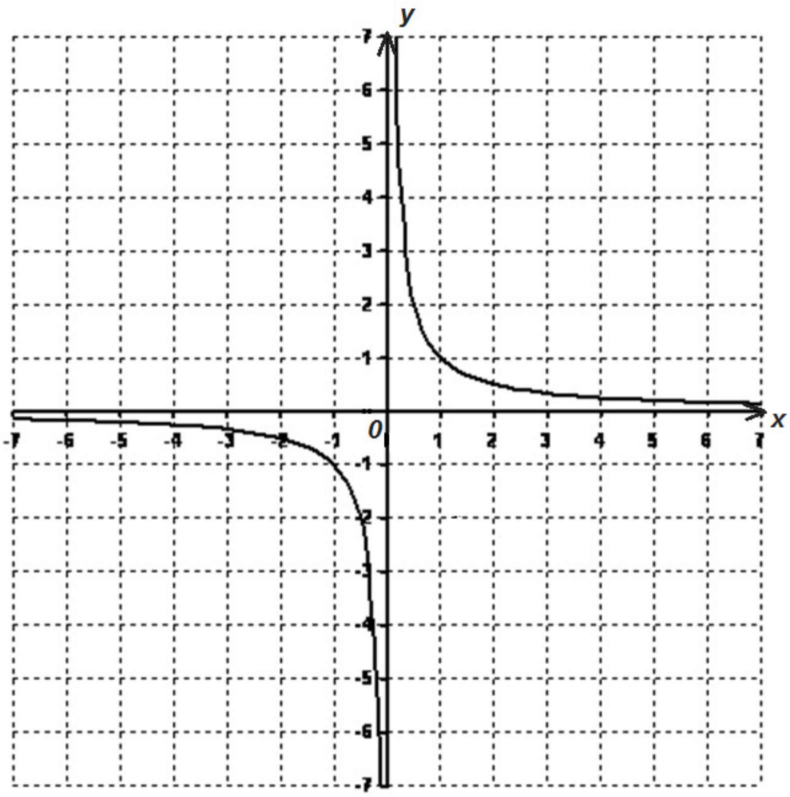
При этом рассуждаем так: ∞ - это не конкретное число, а какая-то очень большая величина; возводим эту большую величину в степень – получаем еще больше величину, т.е. ∞; от полученной большой величины отнимем 9 – особо ничего не изменится, т.е. в числителе будет ∞; поделим эту большую величину на 5 – все равно получим большую величину, т.е. ∞

Пример 2: Найти предел функции $y = \frac{1}{x}$, при условии, что x стремится к нулю.

Решение: $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x} = \frac{1}{0}$

При непосредственном вычислении получили вот такую дробь $\frac{1}{0}$, но на 0 делить нельзя, следовательно при данном условии функция предела не имеет, т.е. $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x} = \frac{1}{0} = \infty$ **(1.)**

Обратимся к чертежу:



Видим, что если значения x будут приближаться к нулю, то график функции будет прижиматься к оси ОУ, ветвь графика будет уходить в бесконечность.

Определение: Величина называется **бесконечно малой**, если ее предел равен нулю.

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0$$

Пример 1: Решение: $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{2x} = \frac{3^2-9}{2\cdot 3} = \frac{9-9}{6} = \frac{0}{6} = 0$ – при данном предельном значении x функция является величиной бесконечно малой.

Пример 2: Найти предел функции $y = \frac{1}{x}$, при условии, что x непрерывно увеличивается, т.е. стремится к бесконечности.

Решение: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x} = \frac{1}{\infty}$

При непосредственном вычислении получили вот такую дробь $\frac{1}{\infty}$, а согласно определению должны получить число (либо ∞, если предела нет). Обратимся к чертежу: видим, что если значения x будут увеличиваться, то график функции будет прижиматься к оси OX, а значения функции будут приближаться к нулю, следовательно, в этом случае предел функции будет равен нулю, т.е.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0 \ \textbf{(2.)}$$

Из равенств (1.) и (2.) можно сделать вывод: если при вычислении предела получим дробь $\frac{1}{0}$, то ее можно заменить не ∞ и сделать вывод, что в данном случае функция предела не имеет; если при вычислении предела получим дробь $\frac{1}{\infty}$, то ее можно заменить на 0 и сделать вывод, что в данном случае предел функции равен числу 0.

$$\frac{1}{0} = \infty\ (1.), \qquad \frac{1}{\infty} = 0\ (2.)$$

1.1.4 Раскрытие неопределенностей

Напомним, что вычислить предел – это значит найти число, к которому приближаются значения функции, или установить, что при данном предельном значении x функция предела не имеет.

Бывают случаи, что вычисляя предел непосредственно, мы не получаем числа, но и не получаем ∞ (то есть не можем сделать вывод, что предела нет). Такие случаи называются неопределенностями и их нужно раскрывать. Рассмотрим некоторые виды неопределенностей и правила их раскрытия.

1)Раскрытие неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$

Если при непосредственном вычислении предела получим дробь $\frac{\infty}{\infty}$, то необходимо вернуться в предел, разделить числитель и знаменатель дроби на наивысшую степень x, сократить и снова вычислить предел с учетом равенства **(2.).**

Пример: $\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+3x-5}{1-2x^4} = \frac{\infty^4+3\cdot\infty-5}{1-2\cdot\infty^4} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^4}{x^4}+\frac{3x}{x^4}-\frac{5}{x^4}}{\frac{1}{x^4}-\frac{2x^4}{x^4}} = = \lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{3}{x^3}-\frac{5}{x^4}}{\frac{1}{x^4}-2} = \frac{1+\frac{3}{\infty}-\frac{5}{\infty}}{\frac{1}{\infty}-2}$ $= \frac{1+0-0}{0-2} = -\frac{1}{2}$

2)Раскрытие неопределенности вида $\infty - \infty$.

Если при непосредственном вычислении предела получили разность $\infty - \infty$, то сделать вывод, что результат равен 0 мы не может, т.к. ∞ **-** это не конкретное число, а абстрактная величина, обозначающее нечто очень большое (и вряд ли эти две бесконечности равны между собой).

В этом случае воспользуемся формулой сокращенного умножения

$а^2$ – $в^2$ = (а + в) · (а – в). Напомним, что множители, стоящие в правой части этого равенства называются *сопряженными* (отличаются только знаком между слагаемыми).

Если при непосредственном вычислении предела получили разность $\infty - \infty$, то необходимо вернуться в предел, умножить и разделить данное выражение на ему сопряженное, преобразовать и снова вычислить предел.

Пример: $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right) = \sqrt{\infty+1} - \sqrt{\infty} = \sqrt{\infty} - \sqrt{\infty} = \infty - \infty =$ $\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})\cdot(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x+1})^2-(\sqrt{x})^2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} =$ $\frac{1}{\sqrt{\infty+1}+\sqrt{\infty}} = \frac{1}{\infty+\infty} = \frac{1}{\infty} = 0$

3)Раскрытие неопределенности вида $\frac{0}{0}$

Такой вид неопределенностей могут давать три вида функций: дробно-рациональные, иррациональные, тригонометрические. Для каждого вида функций существует свое правило раскрытия неопределенности. Рассмотрим их.

а) Дробно – рациональные функции

Чтобы раскрыть неопределенность $\frac{0}{0}$ в данном случае, разложим числитель и знаменатель дроби на множители, сократим и снова вычислим предел.

Пример:

1)$\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{2^2-4}{2-2}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to2}\frac{(x+2)(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to2}(x+2)=2+2=4$

2)$\lim_{x\to2}\frac{2x^2-5x+2}{x-2}=\frac{2\cdot4-5\cdot2+2}{2-2}=\frac{0}{0}=$

$=\lim_{x\to2}\frac{2(x-2)(x-\frac{1}{2})}{x-2}=\lim_{x\to2}2(x-\frac{1}{2})=$

$=\lim_{x\to2}(2x-1)=2\cdot2-1=4-1=3$

$2x^2-5x+2=0$
$D=25-16=9$
$X_1=\frac{5+3}{4}=2$
$X_2=\frac{5-3}{4}=\frac{1}{2}$
$2x^2-5x+2=2(x-2)(x-\frac{1}{2})$

б) Иррациональные функции

Чтобы раскрыть неопределенность $\frac{0}{0}$ в данном случае, вернемся в предел, умножим числитель и знаменатель дроби на выражение сопряженное тому, которое содержит корни, свернем по формуле сокращенного умножения

$\mathbf{a^2-в^2=(a+в)\cdot(a-в)}$, преобразуем и снова вычислим предел.

Пример:

$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{5x}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{5\cdot0}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x})(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}{5x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{2+x})^2-(\sqrt{2-x})^2}{5x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}=$
$\lim_{x\to0}\frac{2+x-2+x}{5x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}=\lim_{x\to0}\frac{2x}{5x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}=\lim_{x\to0}\frac{2}{5(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}=\frac{2}{5\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{2})}=\frac{2}{5\cdot2\sqrt{2}}=$
$\frac{1}{5\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{10}$

в) Тригонометрические функции

Чтобы раскрыть неопределенность $\frac{0}{0}$ в данном случае, воспользуемся формулой **первого замечательного предела:** $\mathbf{\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}=1}$

Почему такое смешное название? Потому, что этот предел уже посчитан, он равен 1, и для нас это просто замечательно! Наша задача – правильно воспользоваться формулой. Чтобы формула «работала», в знаменателе нашей дроби должно стоять точно такое же выражение, что и под знаком синуса. Нам необходимо определить, что же в нашем примере можно **взять за t – только то, что находится под знаком синуса.**

Пример: $\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{2x}=\frac{\sin(3\cdot0)}{2\cdot0}=\frac{\sin 0}{0}=\frac{0}{0}=\lim_{3x\to0}(\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{3}{2})=$

$=\frac{3}{2}\cdot\lim_{3x\to0}\frac{\sin 3x}{3x}=\frac{3}{2}\cdot1=1{,}5$

Поясним: т.к. t – это 3x, то, согласно формуле первого замечательного предела, делить мы должны то же на 3x. Но «тройки» в знаменателе не было, мы ее дописали туда сами, что бы «подогнать» наше выражение под формулу (по этой же причине можно записать не $x \to 0$, а $3x \to 0$, от этого ничего не изменится), поэтому, согласно основному свойству дроби, раз мы на 3 умножили знаменатель, то умножим на 3 и числитель. В первоначальной дроби в знаменателе был множитель 2 – вернем его на место! Таким образом образовалась дробь $\frac{3}{2}$. Далее воспользовались свойством пределов №4 (см. пункт 3) и заменили полученный предел на 1, согласно формуле первого замечательного предела. Получили произведение $\frac{3}{2} \cdot 1$, которое 1,5.

4)Раскрытие неопределенности вида $\mathbf{1^{\infty}}$

Такую неопределенность дают показательные функции, связанные с экспонентой – числом е (кто заинтересовался – на просторах интернета про число е можно найти много информации).

Чтобы раскрыть неопределенность вида 1^{∞}, воспользуемся одной из двух формул **второго замечательного предела:**

$$\mathbf{1)} \lim_{t \to 0}(1 + t)^{\frac{1}{t}} = e$$

$$\mathbf{2)} \lim_{t \to \infty}\left(1 + \frac{1}{t}\right)^{t} = e$$

Какую из формул выбирать – все зависит от того, к чему стремится x: если к нулю, то выбираем первую формулу; если к бесконечности – то вторую.

Чтобы наши формулы «работали», важно, чтобы в вычисляемом нами пределе «единицы» и «плюсики» стояли на тех же местах, что и в формулах.

Теперь определимся с t: если применяем первую формулу, то t – это то выражение, которое прибавляем к единице, стоящей в скобках; если по второй, то t – это выражение, на которое мы делим единицу, стоящую в скобках.

Пример:

$$1) \lim_{x \to 0}(1 - 4x)^{\frac{7}{x}} = (1 - 4 \cdot 0)^{\frac{7}{0}} = 1^{\infty} = \lim_{-4x \to 0}\left(1 + (-4x)\right)^{\frac{1}{-4x} \cdot \frac{-4 \cdot 7}{1}} = = e^{-28}$$

Поясним: по формуле в скобках должно быть выражение 1 + t, следовательно, t – это -4x. По формуле в показателе степени должна быть дробь $\frac{1}{t}$, следовательно, у нас в показателе будет $\frac{1}{-4x}$. Далее, т.к. мы на -4 умножили знаменатель показателя сами, то умножим и числитель на -4, и вернем в числитель показателя множитель 7, который был там в первоначальном выражении. То, что до знака «умножить» - это **е,** согласно выбранной формуле второго замечательного предела; то, что после – показатель числа е.

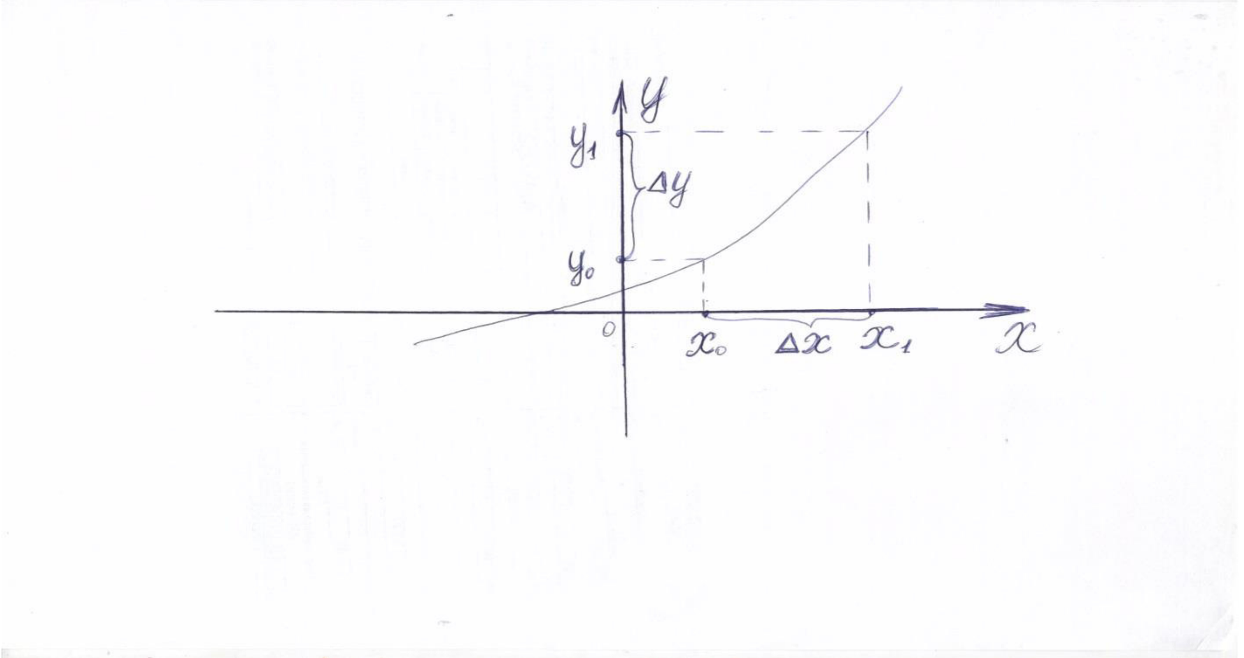
$$2) \lim_{x \to \infty}\left(1 + \frac{3}{2x}\right)^{5x} = \left(1 + \frac{3}{2\infty}\right)^{5\infty} = (1 + 0)^{\infty} = 1^{\infty} =$$

$$= \lim_{\frac{2x}{3} \to \infty}\left(1 + \frac{1}{\frac{2x}{3}}\right)^{\frac{2x}{3} \cdot \frac{3 \cdot 5}{2}} = e^{7,5}$$

1.2 Производная функции и ее применение

1.2.1 Приращение функции и приращение аргумента.

Рассмотрим функцию y = f(x) и ее график:



Пусть x = x_0, тогда соответствующее значение $y_0 = f(x_0)$.

Изменим значение x: пусть $x = x_1$, тогда значение функции в этой точке будет $y_1 = f(x_1)$.

Разница между последующим и предыдущим значением x будем называть **приращением аргумента x** и обозначать Δx (читаем "дельта икс"):

$x_1 - x_0 = \Delta x$.

Соответственно разница между последующим и предыдущим значениями y будем называть **приращением функции** и обозначать Δy $\big($или $\Delta f(x)\big)$(читаем "дельта игрек" или "дельта эф от икс"):

$\Delta y = f(x_1) - f(x_0)$.

1.2.2Производная функции.

Производной функции y = f(x) называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, при условии, что последнее стремится к нулю.

Чтобы отличить производную функции от самой функции, ее принято записывать со штрихом: y' или $(f(x))'$:

$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'$ (так и говорим «игрек штрих» или просто «производная»)

Фраза «отношение приращения функции к приращению аргумента», которое присутствует в определении производной, это и есть дробь $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Действие нахождения производной функции называется **дифференцированием.**

(Обратите внимание, что это действие! Так же как в алгебре есть действия сложения, вычитания, умножения и т.д., в математическом анализе есть действие дифференцирование. В чем его смысл, выясним чуть позже).

1.2.3Вычисление производных элементарных функций.

Как было сказано выше, производная функции – это предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю. Но вычислять всякий раз такие пределы - довольно трудоемкий процесс. Следовательно, должны существовать какие-то «инструменты», позволяющие облегчить эту задачу. В математике в качестве инструментов выступают различные правила и формулы.

Элементарные функции – это простейшие функции, изучаемые в школьном курсе, такие как: $y = x$, $y = x^n$, $y = a^x$; $y = \ln x$; $y = \log_a x$; $y = \cos x$; $y = \sin x$; $y = tg\ x$; $y = ctg\ x$.

Чтобы вычислить производную любой из этих функций, надо знать формулы дифференцирования. Все они были выведены по определению производной, т.е. с использованием предела.

Формулы дифференцирования

1. $(C)' = 0$
2. $(x)' = 1$
3. $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$
4. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$
5. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
6. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$
7. $(e^x)' = e^x$
8. $(\sin x)' = \cos x$
9. $(\cos x)' = -\sin x$
10. $(tg\ x)' = \frac{1}{cos^2\ x}$
11. $(ctg\ x)' = -\frac{1}{sin^2\ x}$

Во всех формулах в левой части записаны только правые части функции $y = f(x)$, т.е. во всех 11-ти формулах перед знаком « = » записаны только $f(x)$.

1.В первой формуле С – это просто какое – то действительное число. Если функция представлена в виде $y = C$, то ее производная всегда равно нулю. Например:

1) $y = 4$, тогда производную будем находить так:

$y' = (4)' = 0$.

2)$y = -3$ Найдем ее производную:

$y' = (-3)' = 0$

2.Третья формула – это степенная функция.

Вместо показателя n может быть любое действительное число, все равно, производную будем находить только по формуле $n \cdot x^{n-1}$. Например:

1) $y = x^2$
   $y' = (x^2)' = 2 \cdot x^{2-1} = 2x$

2) $y = x^{-3}$
   $y' = (x^{-3})' = -3 \cdot x^{-3-1} = -3x^{-4}$

3) $y = x^{\frac{2}{3}}$
   $y' = \left(x^{\frac{2}{3}}\right)' = \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{1}{3}}$

3.Четвертая формула – это логарифмическая функция, где а – это некоторое число, а > 0 и $\neq 1$. Например:

1)y = $\log_2$ x

$y' = (\log_2 x)' = \frac{1}{x \cdot \ln 2}$ Напомним, что ln2 – это натуральный логарифм числа 2, вычислять который не требуется.

2) y = $\log_7$ x

$y' = (\log_7 x)' = \frac{1}{x \cdot \ln 7}$

4.Шестая формула – это показательная функции, где а – основание степени, некоторое число. Например:

1)y= 2^x

$y' = (2^x)' = 2^x \cdot \ln 2$

2) y= $1{,}4^x$

$y' = (1{,}4^x)' = 1{,}4^x \cdot \ln 1{,}4$

Обратите внимание, что когда вычисляем производную, обязательно проставляем штрихи у обеих частей формулы функции, а правую часть берем в скобки. Тем самым показываем, что мы выполняем действие дифференцирования.

Примечание:

1) т. к. нет формулы дифференцирования арифметических корней, необходимо корень представить в виде степени с дробным показателем и воспользоваться формулой № 3, например:

$$\left(\sqrt[5]{x^2}\right)' = \left(x^{\frac{2}{5}}\right)' = \frac{2}{5} \cdot x^{\frac{2}{5}-1} = \frac{2}{5} \cdot x^{-\frac{3}{5}} = \frac{2}{5 \cdot \sqrt[5]{x^3}}$$

2) Т.к. нет формулы дифференцирования дробей $\frac{C}{x^n}$, необходимо представить эту дробь в виде степени с отрицательным показателем и воспользоваться формулой № 3, например:

$$\left(\frac{2}{x^4}\right)' = (2 \cdot x^{-4})' = 2 \cdot (-4) \cdot x^{-4-1} = -8 \cdot x^{-5} = -\frac{8}{x^5}$$

Функция может быть представлена в виде композиции нескольких элементарных функций: в виде суммы(разности), в виде произведения, в виде дроби, или в виде произведения элементарной функции на какое– нибудь число. В этом случае, прежде чем применять формулы, надо воспользоваться правилами дифференцирования.

Правила дифференцирования

1. $(u + v - k)' = u' + v' - k'$

2. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

3. $(Cu)' = Cu'$

4. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

Например:

1)$y = 5x$

$y' = (5x)' = 5\cdot (x)' = 5 \cdot 1 = 5$

Здесь мы сначала применили третье правило: вынесли за знак производной множитель 5; а потом воспользовались второй формулой дифференцирования и нашли производную, а затем просто перемножили пять и результат нахождения производной.

2)$y = 2x^3$

$y' = (2x^3)' = 2 \cdot (x^3)' = 2 \cdot 3 \cdot x^{3-1} = 6x^2$

Воспользовались третьим правилом, вынесли за знак производной множитель 2, а затем применили третью формулу дифференцирования.

3) $y = 2\sin x + 3x - 4$

$y' = \left(2\sin x + 3x - 4\right)' = (2\sin x)' + (3x)' - (4)' = 2 \cdot (\sin x)' + 3\cdot (x)' - (4)' = 2\cdot \cos x + 3\cdot 1 - 0 = 2\cos x + 3$

В этом примере функция представлена в виде суммы элементарных функций, поэтому мы сначала применили первое правило дифференцирования (записали производную суммы в виде суммы производных слагаемых), затем применили третье правило (вынесли множители за знак производной), а потом по формулам подставили готовые результаты.

4)$y = 4x^3 \cdot e^x$

$y' = (4x^3 \cdot e^x)' = (4x^3)' \cdot e^x + 4x^3 \cdot (e^x)' = 4 \cdot (x^3)' \cdot e^x + 4x^3 \cdot (e^x)' =$

$= 4 \cdot 3\cdot x^{3-1} \cdot e^x + 4x^3 \cdot e^x = 12x^2 \cdot e^x + 4x^3 \cdot e^x$

В этом примере функция представлена в виде произведения элементарных функций, поэтому сначала применили второе правило, затем третье, а потом только воспользовались формулами дифференцирования.

4) $y = \frac{x^2}{2x+3}$

$$y' = \left(\frac{x^2}{2x+3}\right)' = \frac{(x^2)' \cdot (2x+3) - x^2 \cdot (2x+3)'}{(2x+3)^2} = \frac{2x \cdot (2x+3) - x^2 \cdot 2}{(2x+3)^2} = \frac{4x^2+6x-2x^2}{(2x+3)^2} =$$

$$= \frac{2x^2+6x}{(2x+3)^2}$$

Здесь функция представлена в виде дроби, в числителе и знаменателе которой элементарные функции. Поэтому мы сначала применили четвертое правило, а затем воспользовались формулами. **Обратите внимание, что в знаменателе не раскрываем квадрат!**

Примечание: «штрих» – это символ математического действия, такой же как «+», «-», « · » и т.д., обозначающий действие дифференцирования. Пренебрежение им является грубейшим нарушением и пропуск его в письменных работах расценивается как ошибка. Будьте внимательны при выполнении задания, смотрите примеры, разобранные в тексте!

1.2.4 Производная сложной функции

Ранее были рассмотрены формулы для нахождения производных элементарных функций, которые в общем виде можно представить как **y = f(x).**

Сложная функция – это функция вида **y = f(g(x)) (1.)**,

где **g(x)** – это **внутренняя функция**, ее можно представить как **u = g(x)** – тоже элементарная. Тогда формула **(1.)** примет вид: **y = f(u)**, где **f(u)** – называется внешней функцией.

Например:

1) y = cos(2x – 1), здесь u = 2x – 1 – внутренняя функция, а y = cos u – внешняя
2) y = tg 5x, здесь u = 5x – внутренняя функция, y = tg u – внешняя
3) y = e^{3x}, здесь u = 3x – внутренняя функция, y = e^{u} – внешняя
4) y = $\log_2(1-4x)$, где u = 1 – 4x – внутренняя, y = $\log_2 u$ – внешняя
5) y = $(4+3x)^7$, здесь u = 4 + 3x – внутренняя, y = u^7 – внешняя

То есть в формуле **(1.)** присутствуют в нашем случае две функции, тогда при нахождении производной функции **(1.)** нам придется находить производные и внутренней функции, и внешней.

Чтобы найти производную сложной функции, надо найти производную внешней функции и умножить ее на производную внутренней.

$\left(\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{x}))\right)' = (\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}))' \cdot (\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}))'$ **(2.)**

Например:

1)y = cos(2x – 1)

Решение: $y' = (\cos(2x-1))' = (\cos u)' \cdot (2x-1)'$ = - sin u · 2 = - 2 · sin (2x – 1)

2)y = tg 5x

Решение: $y' = (tg\ 5x)' = (tg\ u)' \cdot (5x)' = \frac{1}{cos^2 u} \cdot 5 = \frac{5}{cos^2 5x}$

3)y = e^{3x}

Решение: $y' = (e^{3x})' = (e^{u})' \cdot (3x)' = e^{u} \cdot 3 = 3 \cdot e^{3x}$

4)y = $\log_2(1-4x)$

Решение: $y' = (\log_2(1-4x))' = (\log_2 u)' \cdot (1-4x)' = \frac{1}{u \cdot \ln 2} \cdot (-4) = \frac{-4}{(1-4x) \cdot \ln 2}$

5)y = $(4+3x)^7$

Решение: $y' = ((4+3x)^7)' = (u^7)' \cdot (4+3x)' = 7 \cdot u^6 \cdot 3 = 21 \cdot (4+3x)^6$

1.2.5 Физический смысл первой производной

Производная функции – это есть мгновенная скорость изменения этой функции.

В этом и заключается физический смысл производной.

Но, находя производную функции, мы находим не числовое значение мгновенной скорости, а формулу, по которой можно вычислить это числовое значение.

Задача: Найти мгновенную скорость точки, движущейся прямолинейно по закону $S(t) = 2t^3 - 4t + 5$, в момент времени t_0 = 2с. Путь измеряется в метрах.

Решение:

Что бы вычислить мгновенную скорость, надо найти значение производной функции S(t), в момент времени t_0, т.е.

$v_{мгн.} = S'(t_0)$

Другими словами, необходимо найти производную функции S(t), а затем вычислим значение этой производной в точке t_0, то есть в точке 2.

$S'(t) = (2t^3 - 4t + 5)' = 2 \cdot 3 \cdot t^{3-1} - 4 \cdot 1 + 0 = 6t^2 - 4$

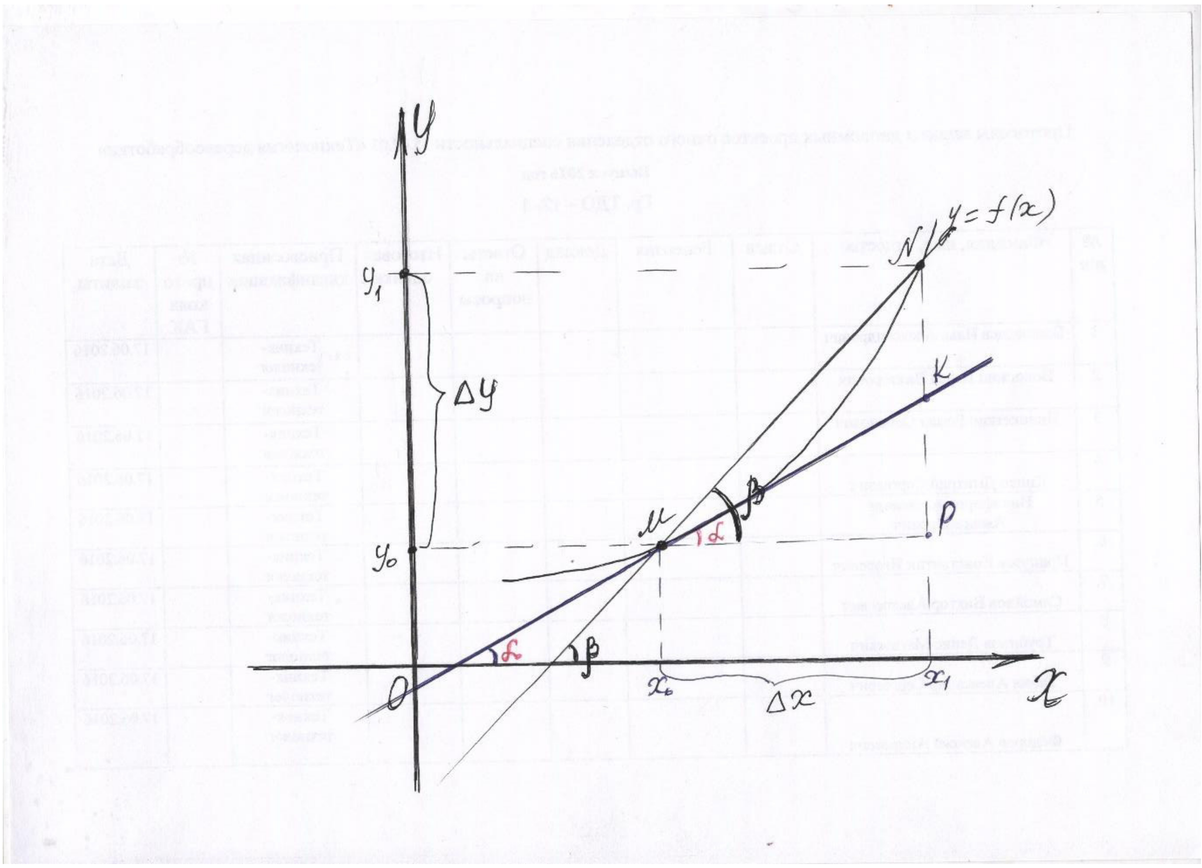
$v_{мгн.} = S'(t_0) = S'(2) = 6 \cdot 2^2 - 4 = 24 - 4 = 20$м/с

Ответ: $v_{мгн.} = 20$м/с

1.2.6 Дифференциал функции

Рассмотрим функцию y = f(x) и ее график.

Пусть некоторая прямая MN пересекает график этой функции в точках M и N.



В этом случае прямая MN будет называться *секущей.*

Устремим точку N к точке M, т.е. будем двигать точку N по кривой графика y = f(x) в направлении точки M. Если перейти на язык пределов, то раз точка N стремиться к точке M, значит точка M будет являться пределом для точки N:

Если N → M, то lim N = M.

Теперь посмотрим, что будет происходить при этом с прямой MN: т.к. точка M неподвижна, то при движении точки N по кривой, секущая MN начнет разворачиваться, и как только N совпадет с M, секущая MN превратиться в касательную (назовем ее MK) к графику функции в точке M.

Получается, если точка N стремится к точке M, то секущая MN стремится занять положение касательной MK. Далее, рассматривая треугольники MNP и NKP делали вывод, что производная функции, вычисленная в точке касания, равна тангенсу угла наклона – это и был геометрический смысл касательной.

Вернемся снова к рисунку. Приращение функции $\Delta y = NP$. Касательная МК делит отрезок NP в точке К. Нижняя часть приращения Δy (то есть отрезка NP) называется **дифференциалом функции y = f(x)** и обозначается **dy**

$$\mathbf{KP = dy}$$

Из треугольника МКР: $dy = tg\alpha \cdot dx$

Или, учитывая геометрический смысл производной, $\mathbf{dy = y' \cdot dx}$

Дифференциал функции равен произведению производной этой функции и dx.

Например: Найти дифференциал функции:

1) $y = 2x^3 - x + 3$

Решение: $dy = y' \cdot dx = (2x^3 - x + 3)' \cdot dx = (6x^2 - 1) \cdot dx$

2) $y = \cos(2x - 1)$

Решение: $dy = (\cos(2x-1))' \cdot dx = (\cos u)' \cdot (2x-1)' \cdot dx = -\sin u \cdot 2 \cdot dx =$

$= -2 \cdot \sin(2x - 1) \cdot dx$

1.2.7 Производная функции двух независимых переменных

Пусть дана функция **z = f(x,y)-** функция двух независимых переменных x и y.

Будем находить производные по x и по y.

Когда находим производную по x, то считаем y константой (числом) и обозначаем:

$\boldsymbol{Z'_x}$ **- частная производная первого порядка по переменной x**

Когда находим производную по y, то считаем x константой (числом) и обозначаем:

$\boldsymbol{Z'_y}$ **- частная производная первого порядка по переменной y**

Аналогично находим частные производные второго порядка x и y:

$\boldsymbol{Z''_{xx}}$ **- частная производная второго порядка по переменной x**

$\boldsymbol{Z''_{yy}}$ **- частная производная второго порядка по переменной y**

В отличии от функции одной независимой переменной, функция двух независимых переменных имеет еще один вид производных второго порядка – смешенные производные:

$\boldsymbol{Z''_{xy}}$ **- производная по y от производной по x**

$\boldsymbol{Z''_{yx}}$ **- производная по x от производной по y**

Например:

Дана функция $z = x^4 \cdot \sin y$. Найти производные: $\boldsymbol{Z'_x}$, $\boldsymbol{Z'_y}$, $\boldsymbol{Z''_{xx}}$, $\boldsymbol{Z''_{yy}}$, $\boldsymbol{Z''_{xy}}$, $\boldsymbol{Z''_{yx}}$

Решение:

$\boldsymbol{Z'_x} = (x^4 \cdot \sin y)'_x = (x^4)' \cdot \sin y = 4x^3 \cdot \sin y$

$\boldsymbol{Z'_y} = (x^4 \cdot \sin y)'_y = x^4 \cdot (\sin y)' = x^4 \cdot \cos y$

$\boldsymbol{Z''_{xx}} = (4x^3 \cdot \sin y)'_x = (4x^3)' \cdot \sin y = 12x^2 \cdot \sin y$

$\boldsymbol{Z''_{yy}} = (x^4 \cdot \cos y)'_y = x^4 \cdot (\cos y)' = x^4 \cdot (-\sin y) = -x^4 \cdot \sin y$

$\boldsymbol{Z''_{xy}} = (4x^3 \cdot \sin y)'_y = 4x^3 \cdot (\sin y)' = 4x^3 \cdot \cos y$

$\boldsymbol{Z''_{yx}} = (x^4 \cdot \cos y)'_x = (x^4)' \cdot \sin y = 4x^3 \cdot \cos y$

Если частные производные первого порядка были найдены правильно, то смешенные производные должны быть равны!

1.3 Неопределенный интеграл

1.3.1 Первообразная. Неопределенный интеграл.

В математике, как правило, для всякого действия существует обратное действие. Например, для сложения, обратное будет вычитание, для умножения – деление, для возведения в степень – извлечение корня и логарифмирование.

В математическом анализе мы рассматривали действие дифференцирования (нахождение производной функции). Для дифференцирования то же существует обратное действие – **интегрирование**. Это действие восстановления функции по заданной производной. Функция, восстановленная по заданной производной, называется **первообразная** (перво**о**́бразная). От слова «первый образ», то есть то, что было в начале.

Первообразную принято обозначать заглавной буквой F: y = F(x)

Рассмотрим несколько функций и их производные:

1) $y = x^2$; $y' = 2x$
2) $y = x^2 + 1$; $y' = 2x$
3) $y = x^2 + 0{,}5$; $y' = 2x$
4) $y = x^2 - 3$; $y' = 2x$
5) $y = x^2 - \sqrt{2}$; $y' = 2x$
6) $y = x^2 + \frac{2}{7}$; $y' = 2x$
7) $y = 4 + x^2$; $y' = 2x$

Видим, что во всех случаях функции были в общем-то разные, а производные получились одинаковые.

Теперь представим, что перед нами стоит обратная задача: дана функция $y = 2x$, которая является производной какой-то другой функции и нам надо эту другую функцию найти, то есть другими словами, найти первообразную функции $y = 2x$.

Какую же функцию мы можем найти, ведь производная от любого постоянного число (не содержащего x) всегда равна нулю? Получается, что мы можем найти любую из перечисленных. Но указать конкретно какую – этого, увы, сделать не возможно.

Получается, что действие восстановления функции до конца провести нельзя. Получим $F(x) = x^2 + C$, где C – это какое – то число, какое – мы не знаем.

То есть восстанавливая функцию, мы находим не одну первообразную, а множество, которые будут отличаться друг от друга на какое-то слагаемое C.

Множество первообразных для одной функции называется **неопределенным интегралом** (интеграл – потому что мы выполняем действие интегрирования, неопределенный – потому, что это действие до конца не определено из-за наличия постоянного числа C) и обозначается:

$$\int f(x) \cdot dx = F(x) + C$$

$\int$ –знак действия интегрирования

f(x) – заданная производная (подынтегральная функция)
dx – дифференциал по переменной x (в вычислении не участвует, но показывает, по какой переменой была взята производная) **Пренебрегать им нельзя!**
Вернемся к нашей задаче. Решение по восстановлению первообразной по заданной производной y = 2x будет выглядеть так:

$\int 2x \cdot dx = x^2 + C$

Почему нельзя пренебрегать дифференциалом dx?
Рассмотрим опять ряд функций и их производные:
1) y = 3x; y′ = 3
2) y = 3t + 5; y′ = 3
3) y = 3z – 0,4; y′ = 3

Опять видим, что функции разные, а производные получились одинаковые. Если мы не будем знать какую переменную содержала функция, то как же мы будем ее восстанавливать?
Например: $\int 3 \cdot dt$ – дифференциал dt нам «подсказывает», что в первообразной мы должны написать переменную t, то есть
$\int 3 \cdot dt = 3t + C$

Для нахождения производной надо было знать правила и формулы дифференцирования. Для вычисления интегралов, надо знать правила и формулы интегрирования.

1.3.2 Правила интегрирования.

1.$\int (u + v - k)dx = \int udx + \int vdx - \int kdx$

(Интеграл от суммы равен сумме интегралов слагаемых)

2.$\int m \cdot udx = m \cdot \int udx$, где m- число

(Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла)

3. $(\int f(x)dx)' = (F(x) + C)' = f(x)$

(Производная от интеграла равна подынтегральной функции)

Для вычисления интегралов будем пользоваться первыми двумя правилами, а для проверки – третьим.

Обратите внимания, что правил для интегрирования произведений и дробей нет!

1.3.3 Формулы интегрирования

1. $\int dx = x + C$.

2. $\int mdx = mx + C$, где m – постоянный множитель (число)

3. $\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

4. $\int e^x dx = e^x + C$

5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}$

6. $\int \frac{dx}{x}$ = ln |x| +C

7. $\int \sin x\ dx$ = - cos x + C

8. $\int \cos x\ dx$ = sin x + C

9. $\int \frac{dx}{cos^2 x}$ = tg x + C

10. $\int \frac{dx}{sin^2 x}$ = - ctg x + C

Эти формулы еще называют **таблицей интегралов**, а сами интегралы – **табличными.**

Что бы вычислить любой интеграл, необходимо свести его к одному или нескольким табличным!

Например: $\int x^4\ \cdot$ dx = (интеграл табличный – вычислим его по формуле №3) $= \frac{x^{4+1}}{4+1}$ + C $= \frac{x^5}{5}$ + C

Сделаем проверку: найдем производную от полученной первообразной, если мы вычислили правильно, то должны получить подынтегральную функцию:

$\left(\frac{x^5}{5} + C\right)' = \frac{5 \cdot x^4}{5} + 0 = x^4$. Получили подынтегральную функцию, значит интеграл вычислили правильно.

Обратите внимания, что формул для интегрирования корней и дробей вида $\frac{C}{x^n}$ – то же нет! Здесь так же, как и для производных, надо будет сначала воспользоваться свойствами степеней: $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$ и $\frac{C}{x^n}$ = C$\cdot\ x^{-\ n}$

Например:

1) $\int \sqrt[5]{x^2}\ \cdot$ dx – это интеграл не является табличным, но мы можем его свести к табличному интегралу №3, если воспользуемся свойством степеней:

$\int \sqrt[5]{x^2}\ \cdot$ dx = $\int x^{\frac{2}{5}}\ \cdot$ dx = (теперь он табличный, вычисляем его по формуле №3) $= \frac{x^{\frac{2}{5}+1}}{\frac{2}{5}+1}$ + C $= \frac{x^{\frac{7}{5}}}{\frac{7}{5}}$ + C $= \frac{5 \cdot \sqrt[5]{x^7}}{7}$ + C

2) $\int \frac{dt}{t^3}$ = (это интеграл не является табличным, но мы можем его свести к табличному интегралу №3, если воспользуемся свойством степеней) = $\int \frac{1}{t^3}\ \cdot dt = \int t^{-\ 3}\cdot$ dt =
$= \frac{t^{-\ 2}}{-\ 2}$ + C = - $\frac{1}{2t^2}$ + C

3) $\int (2x + 1) \cdot dx =$ (интеграл не табличный, но подынтегральная функция записана в виде суммы, воспользуемся правилом №1) = $\int 2x\ \cdot dx\ +\ \int 1\ \cdot dx =$ (получили два интеграла, н они то же еще не табличные. Вынесем у первого за знак интеграла

множитель 2, согласно правилу №2, а у второго перемножим 1 и dx) = $2\int x \cdot dx + \int dx =$ (вот теперь они оба табличные: первый – формула №3, второй – формула №1) = $\frac{2x^2}{2}$ +x + C = (C пишем только один раз) = $x^2 + x + C$

1.3.4 Метод замены переменной

Если данный интеграл с помощью алгебраических преобразований трудно или невозможно свести к одному или нескольким табличным интегралам, то для его отыскания применяют особые способы, одним из которых является **метод замены переменной (**еще иногда называют **способ подстановки).**

Заметим, что все способы интегрирования имеют целью свести данный интеграл к табличному с помощью тех или иных искусственных приемов.

Способ подстановки заключается в следующем: заменяют новой переменной такую часть подынтегральной функции, при дифференцировании которой получается оставшаяся часть подынтегрального выражения (не считая постоянного множителя, на который всегда можно умножить и разделить подынтегральное выражение).

Например: $\int \sin x \cdot cosx \cdot dx$

Под знаком интеграла произведение. Правила интегрирования произведения у нас нет. Попробуем вычислить этот интеграл методом замены переменной.

Удобно произвести замену sin x = t. Продифференцируем этот выражение:

$(\sin x)' \, dx = t' \, dt$

$\cos x \cdot dx = 1 \cdot dt$

$\cos x \cdot dx = dt$

Видим, что полученный дифференциал равен оставшейся части подынтегрального выражения. Сделаем замену в данном интеграле:

Sin x заменим на t

Cos x · dx заменим на dt, получим: $\int t \cdot dt$ – это табличный интеграл, который равен $\frac{t^2}{2}$ + C

Сделаем обратную замену, т.е. вместо t подставим sin x, получим:

$\frac{1}{2}\sin^2 x + C.$

Решение этого примера оформляем следующим образом:

$$\int \sin x \cdot cosx \cdot dx = \left| \begin{array}{c} \mathbf{\sin x = t} \\ (\sin x)' \, dx = t' \, dt \\ \cos x \cdot dx = 1 \cdot dt \\ \mathbf{\cos x \cdot dx = dt} \end{array} \right| = \int t \cdot dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{1}{2}\sin^2 x + C.$$

Методом замены переменной можно интегрировать сложные функции.

Например:

$$\int \cos(2x+3)\cdot dx = \left| \begin{matrix} \mathbf{2x+3=t} \\ (2x+3)' \cdot dx = t' \cdot dt \\ 2dx = 1 \cdot dt \\ \mathbf{dx = \frac{1}{2}\, dt} \end{matrix} \right| = \int \cos t \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \int \cos t \cdot dt =$$

$$= \frac{1}{2} \sin t + C = \frac{1}{2} \sin (2x+3) + C$$

Обратите внимание: после того, как сделали замену переменной, под знаком интеграла не должно быть старой переменной!!!

Еще один пример:

$$\int (3x^2-1)^5 \cdot x dx = \left| \begin{matrix} \mathbf{3x^2-1=t} \\ (3x^2-1)' \cdot dx = t' \cdot dt \\ 6x \cdot dx = 1 \cdot dt \\ \mathbf{x \cdot dx = \frac{1}{6} dt} \end{matrix} \right| = \int t^5 \cdot \frac{1}{6} dt = \frac{1}{6} \int t^5 \, dt =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{t^6}{6} + C = \frac{1}{36} (3x^2 - 1)^6 + C.$$

1.3.5 Метод интегрирования по частям

При интегрировании функций, содержащих произведения, логарифмы, тригонометрические функции, бывает удобно воспользоваться способом интегрирования по частям.

Для этого часть выражения, стоящего под знаком интеграла обозначают через u, а оставшуюся часть – за dv. То есть данный интеграл будет в виде $\int u \cdot dv$, который в свою очередь будет равен:

$$\int \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{dv} = \mathbf{u \cdot v} - \int \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{du} \ \mathbf{(1.)}$$

Первую замену будем дифференцировать, вторую – интегрировать.

Пример1:

$$\int x \cdot cosx \cdot dx = \left| \begin{matrix} \mathbf{u = x} & dv = \cos x \cdot dx \\ u' \cdot du = x' \cdot dx & \int dv = \int \cos x \cdot dx \\ 1 \cdot du = 1 \cdot dx & \mathbf{v = \sin x} \\ \mathbf{du = dx} & \end{matrix} \right| =$$

Теперь составляем правую часть формулы (1.): вместо u подставим x, вместо v – sin x, вместо du – dx:

$$= x \cdot \sin x - \int \sin x \cdot dx =$$

Последний интеграл должен быть табличным или хотя бы легче того, который был дан. Если последний интеграл оказался сложнее данного, то скорее всего не правильно была выбрана замена, надо вернуться в начало и выбрать за u другую часть подынтегрального выражения. В нашем случае интеграл получился табличный. Продолжаем вычисления:

$$= x \cdot \sin x - (- \cos x) + C = x \cdot \sin x + \cos x + C.$$

Пример 2:

$$\int \ln x \cdot dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x & dv = dx \\ u' \cdot du = (\ln x)' \cdot dx & \int dv = \int dx \\ du = \frac{1}{x} \cdot dx & v = x \end{matrix} \right| = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}\, dx = x \cdot \ln x - \int dx = x \cdot \ln x - x + C$$

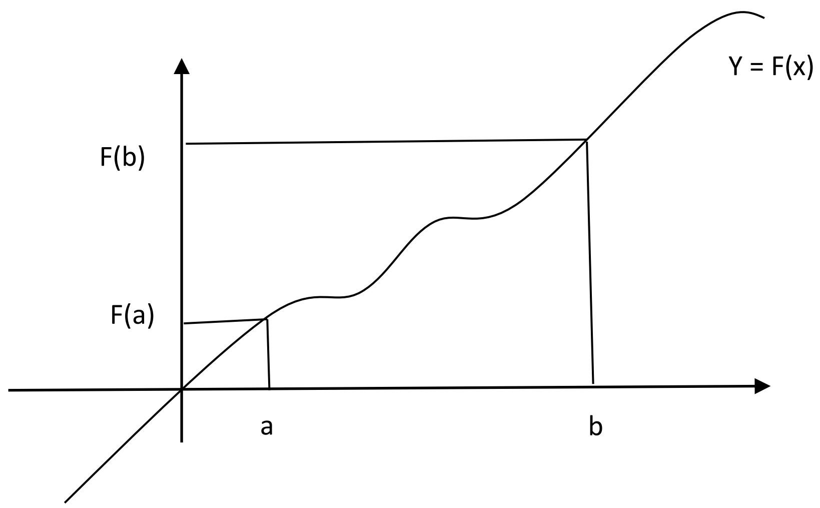
1.4 Определенный интеграл и его применение

1.4.1 Определенный интеграл

Напомним, что первообразная – это функция, восстановленная по заданной производной. Действие нахождения первообразной называется интегрированием.

Так как первообразная – это функция, то для нее должен существовать график.

Рассмотрим некоторую первообразную y = F(x) и ее график на отрезке [a; b]:



F(a) - значение функции в точке x = a,

F(b) – значение функции в точке x = b.

Разница между x = b и x = a – это есть ни что иное, как приращение аргумента Δx (длина отрезка [a; b]), тогда разница между F(b) и F(a) – это приращение функции Δy или ΔF(x) (длина отрезка [F(a); F(b)]), которое находится по формуле:

ΔF(x) = F(b) - F(a)

Рассмотрим задачу: пусть дана функция y = f(x), найти приращение ее первообразной.

Решение: что бы найти приращение первообразной данной функции, надо для начала, найти саму первообразную y = F(x), т.е вычислить интеграл от f(x), затем найти значение этой первообразной в точке x = b, т.е. F(b), потом найти значение первообразной в точке x = a, т.е. F(a), а затем найти разность F(b) - F(a), т.е. ΔF(x). Задача решена.

Для решения подобных задач существует формула:

$$\Delta F(x) = \int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Эта формула называется «Формулой Ньютона – Лейбница», от фамилий двух известных математиков, занимающихся в одно время вопросами интегрального и дифференциального исчисления. Разберем эту формулу подробно.

$\mathbf{f(x)}$ – данная функция, от которой мы будем искать первообразную $\mathbf{F(x)}$, то есть вычислять интеграл.

Символ $\int_a^b$ – показывает, что первообразную придется вычислять на заданном отрезке [a; b].

Числа **a** и **b** – называются **пределами интегрирования**.

Обратите внимание, что в записи отрезка [a; b] число **a** на координатной прямой находится левее числа **b**, а значит **a** меньше, чем **b**, поэтому в записи $\int_a^b$ – **a** является нижним пределом интегрирования, а **b** – верхним (по принципу «чем больше, тем выше»), **если вы по невнимательности поменяете местами пределы интегрирования, то результат вычислений будет неверным!**

Символ $\Big|_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}$ - показывает, что действие интегрирования закончено, первообразная найдена и дальше надо находить значение этой первообразной на концах заданного отрезка.

Разность $F(b) - F(a)$ – показывает, как находить приращение найденной первообразной.

Основная часть формулы Ньютона – Лейбница $\int_a^b f(x)dx$ – называется **определенным интегралом** (читаем «интеграл от а до бэ эф от икс де икс»)

Другими словами**, определенный интеграл** – это **приращение первообразной** на заданном отрезке.

Поэтому в задачах, вместо «найти приращение первообразной» обычно пишут «вычислить определенный интеграл».

В отличии от неопределенного интеграла, в результате вычисления определенного интеграла получаем **число** (т.к. а и b – это числа, соответственно F(a) и F(b) – это тоже числа, следовательно разность $F(b) - F(a)$ – то же число).

При вычислении первообразной для определенного интеграла « + С» писать смысла нет, т.к. нам в дальнейшем вычислять разность F(b) – F(a), то С все равно исчезнет.

Вычислить определенный интеграл:

1) $\int_1^3 2x \cdot dx =$ (сведем по всем правилам наш интеграл к табличному и найдем первообразную) $= 2 \cdot \int_1^3 x \cdot dx = 2 \cdot \frac{x^2}{2} = x^2\Big|_1^3 = 3^2 - 1^2 = 9 - 1 = 8$

2) $\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot dx = - \cos x \Big|_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} = - \cos\frac{\pi}{2} - (- \cos(-\pi)) = - \cos\frac{\pi}{2} - (- \cos\pi) = - \cos\frac{\pi}{2} + \cos\pi = - 0 + (-1) = 0 - 1 = - 1$

Договариваемся, если функция под знаком интеграла записана в скобках, то и первообразную то же будем записывать в скобках, чтобы не растерять знаков при дальнейших вычислениях.

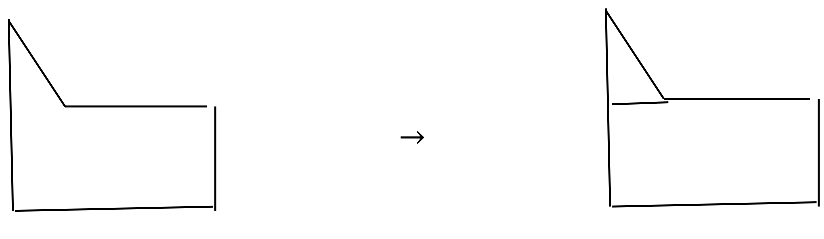
3) $\int_{-3}^{0}(x + 1) \cdot dx = \left(\frac{x^2}{2} + x\right) \Big|_{-3}^{0} = (\frac{0^2}{2} + 0) - \left(\frac{(-3)^2}{2} + (-3)\right) = 0 - \left(\frac{9}{2} - 3\right) = 0 - \frac{9}{2} + 3 = - 4,5 + 3 = - 1,5$

4) $\int_{0}^{1}(e^x - 1)dx = (e^x - x) \Big|_{0}^{1} = (e^1 - 1) - (e^0 - 0) = e^1 - 1 - e^0 + 0 = e - 1 - 1 = e - 2$

5) $\int_{1}^{8} \sqrt[3]{x}\ dx = \int_{1}^{8} x^{\frac{1}{3}}\ dx = \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} = \frac{3\left(\sqrt[3]{x}\right)^4}{4} \Big|_{1}^{8} = \frac{3\left(\sqrt[3]{8}\right)^4}{4} - \frac{3\left(\sqrt[3]{1}\right)^4}{4} = \frac{3\,(2)^4}{4} - \frac{3 \cdot 1^4}{4} = \frac{48}{4} - \frac{3}{4} = \frac{45}{4} = 11,25$

1.4.2 Криволинейная трапеция и ее площадь.

В школьном курсе математике вы уже сталкивались с задачами, в которых требовалось найти площадь прямолинейной фигуры (многоугольника). Для этого разбивали данную фигуру на простейшие многоугольники (треугольники, прямоугольники и т.д.), формулы площадей которых вам известны. Например:



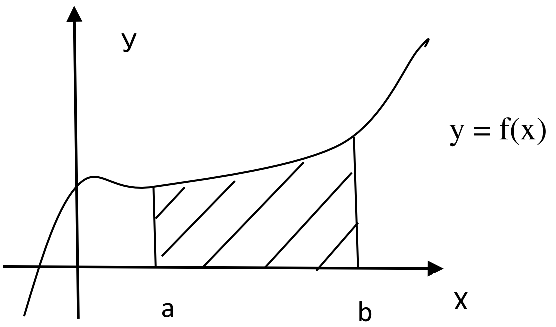
Так же изучали круг, его части: сектор и сегмент, формулы их площадей.

Как быть, если требуется найти площадь фигуры, стороны которой – куски графиков некоторых функций. Такая фигура не является прямолинейной (стороны – не отрезки, а кривые линии), и не является ни кругом, ни частью круга, то есть формулами площадей, изученных ранее фигур, мы воспользоваться не можем.

Простейшей криволинейной фигурой подобного рода является **криволинейная трапеция**, площадь которой можно вычислить с помощью определенного интеграла.

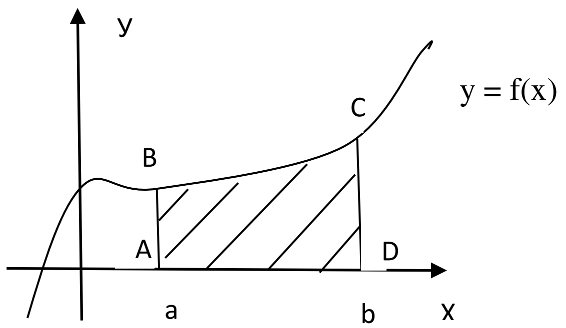
Криволинейная трапеция – это фигура (часть координатной плоскости), ограниченная снизу отрезком [a; b] оси OX, сверху графиком непрерывной на этом отрезке функции y = f(x), слева и справа прямыми x = a, x = b

Такая и только такая фигура будет являться криволинейной трапецией.



Как и любой фигуре, криволинейной фигуре надо присвоить имя. Как обычно – по точкам пересечения:

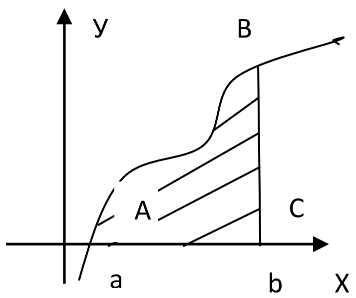
ABCD- криволинейная трапеция



Почему фигура получила такое название?

Если мы сейчас нашу фигуру повернем на 90º по часовой стрелке, то она очень сильно будет походить на прямоугольную трапецию с верхним основание AB и нижним основание DC. Разница в том, что у трапеции (четырехугольника) все стороны – это отрезки (прямые линии), а у нашей фигуры сторона BC – кривая линия – часть графика функции y = f(x).

Возможны случаи, что график функции y = f(x) проходит через один из концов отрезка [a; b] или через оба (например, парабола, вершина которой расположена выше оси OX и ветви направлены вниз), фигура все равно будет являться криволинейной трапецией (согласно определению: график ограничивает фигуру сверху, отрезок оси OX – снизу):



АВС – криволинейная трапеция.	АВС – криволинейная трапеция.	АВС – криволинейная трапеция.

Как уже было сказано выше, площадь криволинейной трапеции можно вычислить с помощью определенного интеграла:

$$\mathbf{S_{кр.трапец.}} = \int_a^b f(x)dx$$

Здесь a и b- концы отрезка [a; b] оси ОХ, на который опирается наша фигура, f(x) – это функция y = f(x), график которой ограничивает фигуру сверху.

Этот интеграл, прежде чем вычислить, необходимо будет составить.

ВНИМАНИЕ: с помощью определенного интеграла можно вычислять площади ТОЛЬКО КРИВОЛИНЕЙНЫХ ТРАПЕЦИЙ. Если фигура не является таковой, то интегралом воспользоваться НЕЛЬЗЯ! Так же как нельзя с помощью формулы площади круга вычислять площади треугольников.

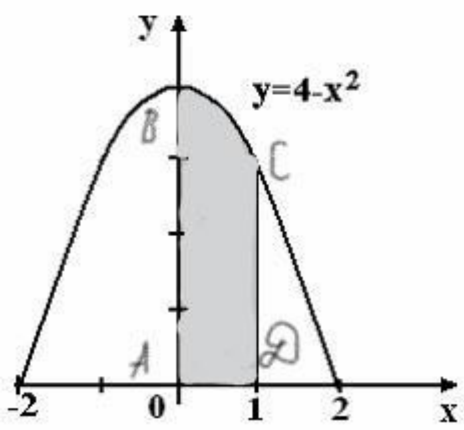
Для решения задач на вычисление площадей криволинейных трапеций удобно пользоваться алгоритмом:

1.Сделать чертеж, используя данные условия задачи, заштриховать получившуюся фигуру и обозначить ее буквами латинского алфавита.
2. Выяснить, является ли фигура криволинейной трапецией (надо проверить, подходит ли она внешним видом под определение).
3.Составить определенный интеграл.
4.Вычислить интеграл.
5.Подписать единицы измерения – квадратные единицы (кв.ед. или ед^2), т.к. на координатной плоскости мы используем ни метры, ни сантиметры, а единичные отрезки.
6.Записать ответ.
Как правило, оценивание подобных задач проходит по этим шести пунктам!

Например**:** вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 4 - x^2$, осью ОХ, прямыми $x = 0$, $x = 1$.

Решение:

1) Сделаем чертеж:



2) ABCD – криволинейная трапеция, согласно определению.

3-5) $S_{ABCD} = \int_0^1 (4 - x^2)dx = \left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \left(4 \cdot 1 - \frac{1^3}{3}\right) - \left(4 \cdot 0 - \frac{0^3}{3}\right) = 4 - \frac{1}{3} - 0 =$

$= 3\frac{2}{3}$ (кв.ед.)

6) Ответ: $S_{ABCD} = 3\frac{2}{3}$ (кв.ед.)

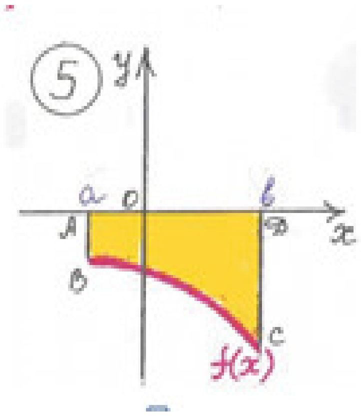
И еще один важный момент: площадь не может быть отрицательной величиной! Если вы в результате вычислений получили ноль или отрицательное число – ищите ошибку! Проверьте, возможно вы перепутали местами пределы интегрирования, или допустили вычислительную ошибку.

1.4.3 Криволинейные фигуры и их площадь

Бывают случаю, когда фигура криволинейная, но не является криволинейной трапецией. Тогда для вычисления ее площади мы не можем использовать ни формулы из геометрии, ни определенный интеграл (по крайней в том виде, в каком мы его применяем для нахождения площади криволинейной трапеции).

Выделяют три основных таких случая:

1)Фигура ограничена сверху осью OX, снизу – графиком функции y = f(x).



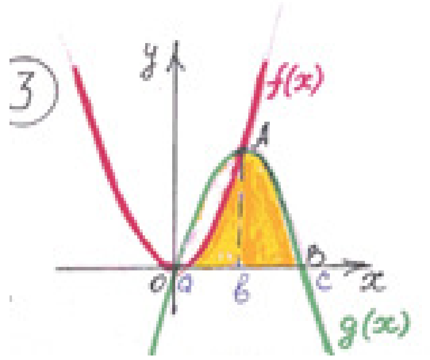
Если симметрично оси OX отобразить фигуру в верхнюю полуплоскость, то она станет криволинейной трапецией. Тогда можно будет площадь фигуры найти с помощью определенного интеграла. Мы сможем выполнить такое преобразование, умножив на -1 функцию, график которой ограничивает фигуру снизу.

Другими словами, площадь нашей фигуры можно вычислить с помощью формулы:

$$S_ф = \int_a^b - f(x)dx$$

Будьте внимательны, не потеряйте этот «минус» при вычислении, иначе площадь будет величиной отрицательной, чего быть не может.

2)Фигура ограничена снизу осью ОХ, сверху – графиками нескольких функций

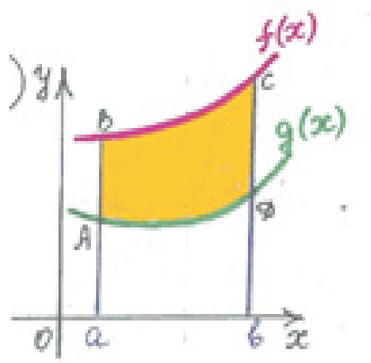


В этом случае из точки пересечении графиков функций y = f(x) и y = g(x) опустим на ОХ перпендикуляр, просчитаем координату x основания перпендикуляра. Получим две криволинейных трапеции: одна опирается на отрезок [a; b] и ограничена сверху графиком функции y= f(x), другая опирается на отрезок [b; c] и ограничена сверху графиком функции y = g(x). Площадь каждой из них можно найти с помощью определенного интеграла.

Тогда площадь нашей фигуры можно вычислить с помощью формулы:

$$S_ф = S_1 + S_2$$

3)Фигура не ограничена осью ОХ



В этом случае проводим через концы отрезка [a; b] прямые, параллельные оси ОУ и пересекающие оба графика (если отрезок не задан, то опускаем из точек пересечения графиков перпендикуляры на ось ОХ и сами находим отрезок [a; b]). Получим две криволинейные трапеции: одна опирается на отрезок [a; b] и ограничена сверху графиком функции y= f(x), другая опирается на отрезок [a; b]и ограничена сверху графиком функции y = g(x). Площадь каждой из них можно найти с помощью определенного интеграла.

Тогда площадь нашей фигуры можно вычислить с помощью формулы:

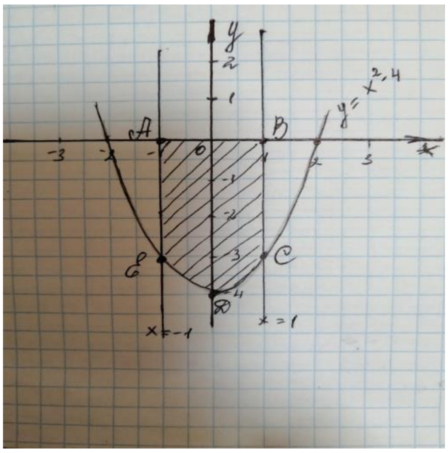
$S_ф = S_{большой}$ - $S_{маленькой}$

Например:

1.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

y = $x^2 – 4$, y = 0, x = - 1, x = 1

Решение:



Видим, что фигура находиться ниже оси OX, вычислим ее площадь с помощью определенного интеграла, перед функцией поставим знак «-»:

$$S_{ABCDE} = \int_{-1}^{1} -(x^2\ - 4)\, dx = \int_{-1}^{1}(-\,x^2 + 4)dx = \int_{-1}^{1}(4 -\ x^2)\, dx = \left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{1} =$$

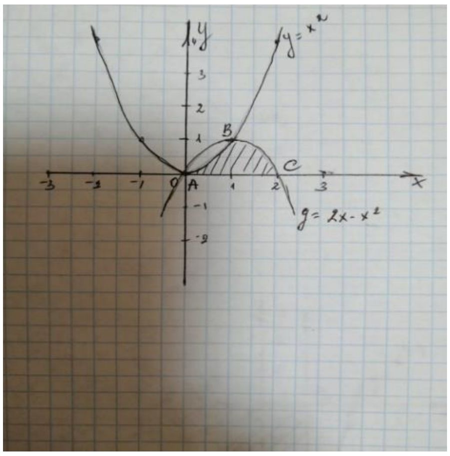
$$= \left(4\ \cdot 1 - \frac{1^3}{3}\right) - \left(4\ \cdot\ (-1) - \frac{(-1)^3}{3}\right) = 4 - \frac{1}{3} + 4 - \frac{1}{3} = 8 - \frac{2}{3} = 7\,\frac{1}{3} \text{ (кв.ед.)}$$

Ответ: $S_{ABCDE} = 7\,\frac{1}{3}$ (кв.ед.)

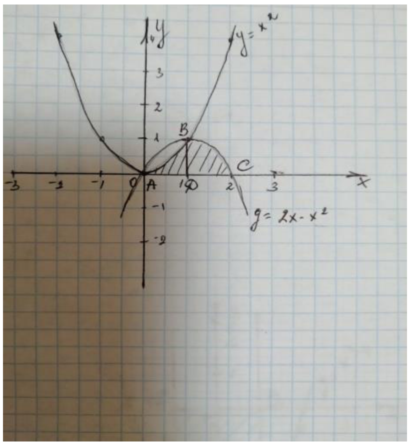
2.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

y = x^2, y = 2x – x^2, y = 0

Решение:



Видим, что фигура снизу ограничена осью OX (отрезок AC), а сверху – графиками двух функций. Из точки B – точки пересечения этих графиков, опустим на ось OX перпендикуляр. Основание перпендикуляра: x = 1(просчитать). Получили две криволинейные трапеции: одна опирается на отрезок АД и ограничена сверху графиком функции $y = x^2$, другая – на отрезок ДС, сверху ограничена графиком функции $y = 2x - x^2$.



$S_{ABC} = S_{ABD} + S_{BCD}$

ABD – криволинейная трапеция

$S_{ABD} = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$ (ед.^{2})

BCD – криволинейная трапеция

$S_{BCD} = \int_1^2 (2x - x^2)\,dx = \left(2\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) = \left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_1^2 = \left(2^2 - \frac{2^3}{3}\right) - \left(1^2 - \frac{1^3}{3}\right) = 4 - \frac{8}{3} - 1 + \frac{1}{3} =$

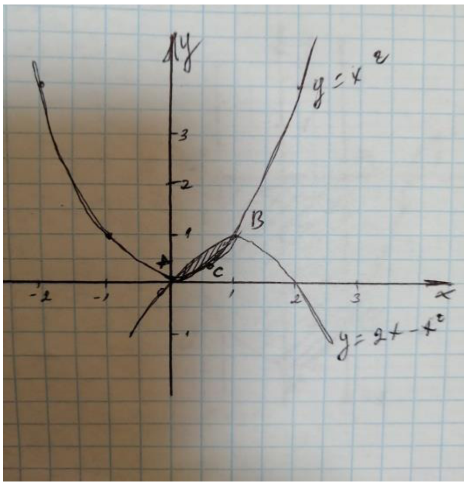
$= 3 - 2\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ (кв.ед)

$S_{ABC} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$ (кв.ед.)

Ответ: $S_{ABC} = 1$ ед^2

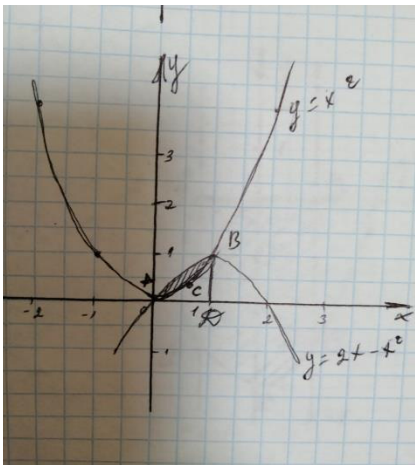
3.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$y = x^2$, $y = 2x - x^2$



Фигура не опирается на ось ОХ. Опустим из точек пересечения графиков перпендикуляры на ось ОХ. Это будут точки x = 0 и x = 1

Получим две криволинейные трапеции АВД и АСВД



$S_{ABC} = S_{ABD}$ - $S_{\text{ACB}D}$

ABD – криволинейная трапеция

$S_{\text{AB}D} = \int_0^1 (2\text{x} - x^2\ )\,dx = \left(2\frac{\text{x}^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) = \left(\text{x}^2 - \frac{\text{x}^3}{3}\right)\Big|_0^1$ = 1 - $\frac{1}{3}$ – 0 = $\frac{2}{3}$ (ед.^{2})

ACBD – криволинейная трапеция

$S_{\text{ACB}D} = \int_0^1 \text{x}^2\,dx = \frac{\text{x}^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$ (ед.^{2})

$S_{ABC} = \frac{2}{3}$ - $\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ (кв.ед)

Ответ: $S_{ABC} = \frac{1}{3}$ (кв.ед)

2.Элементы аналитической геометрии

2.1.Векторы и их виды.

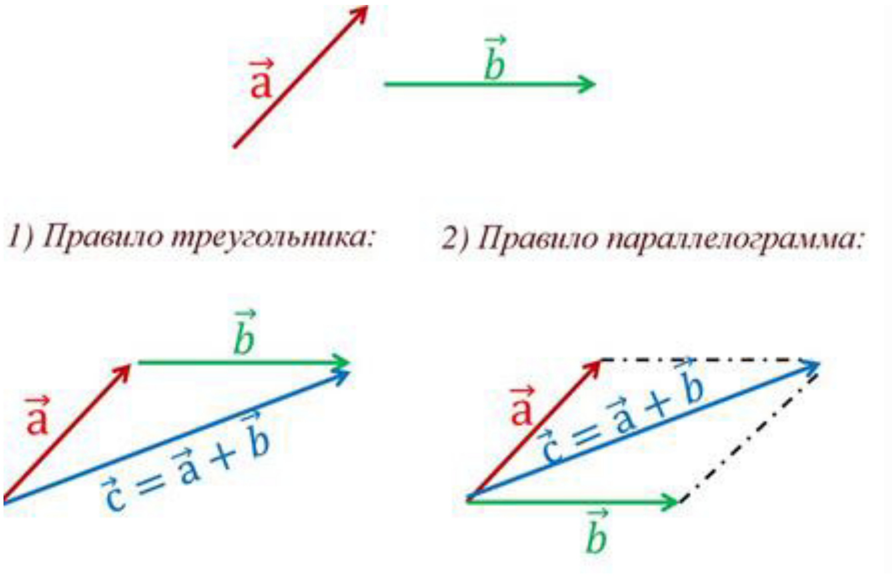
Вектором называется любой направленный отрезок.

Вектор, длина которого равна нулю, называется *нулевым вектором.* Векторы, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых, называются *коллинеарными. Сонаправленные* векторы – это коллинеарные векторы, направленные в одну сторону. Коллинеарные векторы, направленные в противоположные стороны – *противоположно направленные векторы. Равными* называются вектора длина и направление которых совпадают. *Противоположные* векторы – это противоположно направленные векторы равной длины.

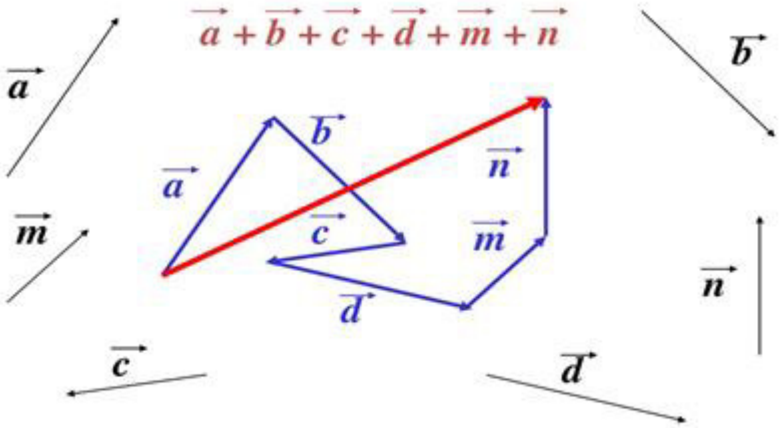
2.2 Действие над векторами в геометрической форме.

2.2.1Сумма векторов

Суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{в}$ называется такой вектор $\vec{c}$, начало которого совпадает с началом вектора $\vec{a}$, а конец - с концом вектора $\vec{в}$, при условии, что начало вектора $\vec{в}$ перенесено в конец вектора $\vec{a}$.

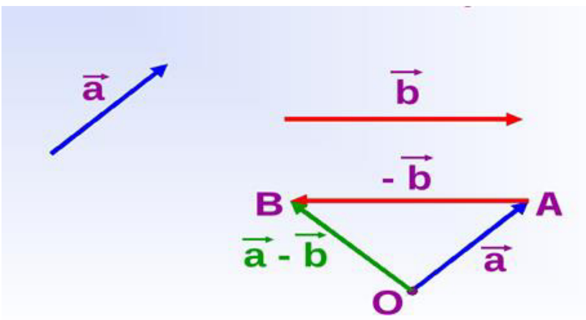


Правило ломанной: последовательно соединяем вектора. Вектор суммы – это вектор идущий из начала движения в конец движения.



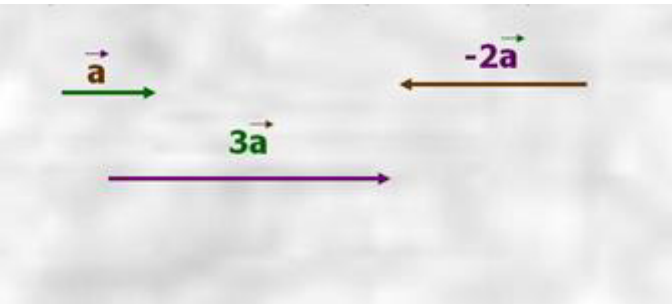
2.2.2 Разность векторов

Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{в}$ называют сумму векторов $\vec{a}$ и - $\vec{в}$, т.е $\vec{a}$ - $\vec{в}$ = $\vec{a}$ + (-$\vec{в}$).



2.2.3 Произведение вектора на число

Произведение вектора $\vec{a}$ на вещественное число к называется вектор $\overrightarrow{ka}$, длина которого равна к$|\vec{a}|$, и коллинеарен вектору $\vec{a}$.



2.2.4. Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам

Напомним, что вектора называются коллинеарными, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

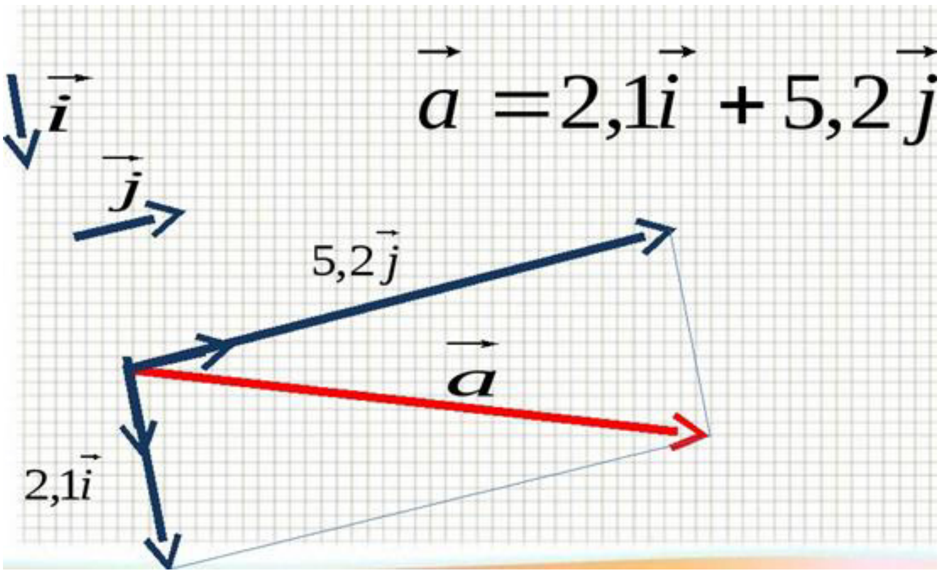
Любой вектор $\vec{m}$ на плоскости может быть представлен единственным способом в виде линейной комбинации двух неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т.е. $\vec{m} = x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b}$, где x и y – некоторые числа

Например:

Даны два неколлинеарных вектора $\vec{i}$ и $\vec{j}$. Найти $\vec{a} = 2{,}1\vec{i} + 5{,}2\vec{j}$

Согласно правилу умножения вектора на число, вектор $2{,}1\vec{i}$ будет коллинеарен вектору $\vec{i}$, сонаправлен с ним и длина его будет в 2,1 раза больше длины вектора $\vec{i}$. То же самое можно сказать про вектор $5{,}2\vec{j}$

Нам нужно построить вектор $\vec{a}$ – это вектор суммы. Найдем этот вектор по правилу параллелограмма.



Задача:

Дан треугольник АВС, точка М – середина стороны АВ, $\overline{CM} = \bar{a}$, $\overline{AC} = \bar{\text{в}}$. Разложить по векторам $\bar{a}$ и $\bar{\text{в}}$ векторы $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{BM}$.

Дано:

Δ АВС

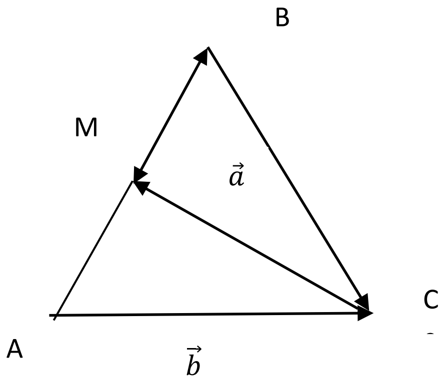
АМ = МВ

$\overline{CM} = \bar{a}$,

$\overline{AC} = \bar{\text{в}}$

Разложить:

по векторам $\bar{a}$ и $\bar{\text{в}}$ векторы $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{BM}$.



Решение:

1)По правилу треугольника $\overrightarrow{AM} = \vec{b} + \vec{a}$

$$\left.\begin{aligned} &\overrightarrow{AM} \text{ и } \overrightarrow{AB} - \text{сонапрвленные} \\ &|\overrightarrow{AB}| = 2 \cdot |\overrightarrow{AM}|, \text{ т.к. точка М} - \text{середина отрезка АВ по условию} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\overrightarrow{AB} = 2 \cdot \overrightarrow{AM} = 2 \cdot (\vec{b} + \vec{a}) = 2\vec{a} + 2\vec{b}$

$$2)\left.\begin{aligned} &\overrightarrow{BM} \text{ и } \overrightarrow{AM} - \text{ противоположно направленные} \\ &|\overrightarrow{BM}| = |\overrightarrow{AM}|, \text{ т.к. точка М} - \text{середина отрезка АВ по условию} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\overrightarrow{BM} = -\overrightarrow{AM} = -(\vec{b} + \vec{a}) = -\vec{a} - \vec{b}$

3)По правилу треугольника $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{AB}$ – это два противоположных вектора, => $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} = -(2\vec{a} + 2\vec{b}) = -2\vec{a} - 2\vec{b}$

Следовательно: $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = -2\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{b} = -2\vec{a} - \vec{b}$

Ответ: $\overrightarrow{AB} = 2\vec{a} + 2\vec{b}$

$\overrightarrow{BC} = -2\vec{a} - \vec{b}$

$\overrightarrow{BM} = -\vec{a} - \vec{b}$

2.3.Действие над векторами в координатной форме.

2.3.1Сложение векторов

При сложении двух векторов складываются их одноименные координаты.

$\vec{a} = (1; 3; -5)$, $\vec{\text{в}} = (3; 0\ 2)$

$\vec{a} + \vec{\text{в}} = (1+3; 3+0; -5+2) = (4; 3; -3)$

2.3.2Вычитание векторов

При вычитании двух векторов вычитаются их соответствующие координаты.

$\vec{a} - \vec{в} = (1 – 3; 3 – 0; -5 -2) = (-2; 3; -7)$

2.3.3 Умножение вектора на число

При умножении вектора на число каждая координата вектора умножается на это число. $\overrightarrow{2a} = 2(1; 3; -5) = (2; 6; -10)$

2.3.4.Скалярное произведение векторов.

Если вектора заданы своими длинами, то скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{в}$ называется число равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними:

$\vec{a} \cdot \vec{в} = |\vec{a}| \cdot |\overrightarrow{в}| \cdot \cos \angle(\vec{a}, \vec{в})$

Например: Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{в}$, если $|\vec{a}| = 3$, $|\overrightarrow{в}| = 5$, $\angle(\vec{a}, \vec{в}) = 60^o$

Решение: $\vec{a} \cdot \vec{в} = |\vec{a}| \cdot |\overrightarrow{в}| \cdot \cos \angle(\vec{a}, \vec{в}) = 3 \cdot 5 \cdot \cos 60^o = 15 \cdot \frac{1}{2} = 7{,}5$

Если вектора заданы своими координатами, то скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{в}$ называется число равное сумме произведений соответствующих координат:

$\vec{a} \cdot \vec{в} = x_a x_в + y_a y_в + z_a z_в$

Например: Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{в}$, если $\vec{a} = \overrightarrow{(2,-3)}$, $\vec{в} = \overrightarrow{(4;1)}$

Решение: $\vec{a} \cdot \vec{в} = 2 \cdot 4 + (-3) \cdot 1 = 8 – 3 = 5$

2.3.5.Длина вектора.

Длину вектора можно рассматривать как длину радиуса окружности с центром в начале координат, уравнение которой $x^2 + y^2 = r^2$, поэтому

$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Например: Найти длину вектора $\vec{c}$, если $\vec{c} = \overrightarrow{(1;2;3)}$

Решение: $|\vec{c}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$

2.3.6.Угол между векторами.

Из формул скалярного произведения:

$\vec{a} \cdot \vec{в} = |\vec{a}| \cdot |\overrightarrow{в}| \cdot \cos \angle(\vec{a}, \vec{в})$

$\vec{a} \cdot \vec{в} = x_a x_в + y_a y_в + z_a z_в$

следует $\cos \angle(\vec{a}, \vec{в}) = \frac{x_a x_в + y_a y_в + z_a z_в}{|\vec{a}| \cdot |\vec{в}|} = φ$, => $\angle(\vec{a}, \vec{в}) = \arccos φ$

Например: Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{в}$, если $\vec{a} = \overrightarrow{(2,1)}$, $\vec{в} = \overrightarrow{(0;1)}$

Решение: Найдем длины этих векторов.

$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ $|\vec{в}| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{0^2 + 1^2} = \sqrt{1} = 1$

$\cos \angle(\vec{a}, \vec{в}) = \frac{2 \cdot 0 + 1 \cdot 1}{\sqrt{5} \cdot 1} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

$\angle(\vec{a}, \vec{в}) = \arccos \frac{\sqrt{5}}{5}$

2.3.7.Деление отрезка в заданном отношении.

Если точка М делит отрезок АВ в отношении λ, то координаты точки М находятся по формулам:

$Х_м = \frac{Х_А + \lambda Х_В}{1+\lambda}$; $У_м = \frac{У_А + \lambda У_В}{1+\lambda}$; $Z_м = \frac{Z_A + \lambda Z_B}{1+\lambda}$

Например: точка М делит отрезок АВ в отношении 1:2, найти координаты точки М, если А(2; 0), В(4; - 6)

Решение: т.к. точка М делит отрезок АВ в отношении 1:2, то $\lambda = \frac{1}{2}$.Точки А и В заданы двумя координатами, следовательно, очка М то же будет задана двумя координатами х и у. Найдем их.

$Х_м = \frac{Х_А + \lambda Х_В}{1+\lambda} = \frac{2+\frac{1}{2}\cdot 4}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2+2}{\frac{3}{2}} = 4 \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$

$У_м = \frac{У_А + \lambda У_В}{1+\lambda} = \frac{0+\frac{1}{2}\cdot(-6)}{1+\frac{1}{2}} = - 3 \cdot \frac{2}{3} = - 2$

Ответ: М ($2\frac{2}{3}$; - 2)

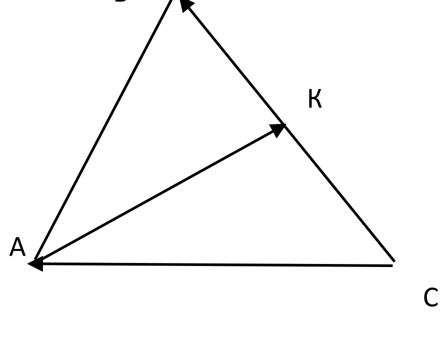
2.3.8.Координаты вектора

Чтобы найти координаты вектора, заданного двумя точками, надо от координат конца отнять координаты начала.

Например: А(2; 5), В(4; 3). Найти координаты вектора $\overrightarrow{АВ}$

Решение: $\overrightarrow{АВ}$ = (4 – 2; 3 – 5) = $\overrightarrow{(2;\ -2)}$

Задача: Дан ΔАВС. Найти периметр треугольника, длину медианы АК и угол С, если А(2; -1), В(0; 3), С(4; 5)



Дано:

ΔАВС

АК – медиана

А(2; -1), В(0; 3), С(4; 5)

Найти:

$Р_{АВС}$, АК, ∠С

Решение:

1.$P_{\Delta ABC} = |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}| + |\overrightarrow{CA}|$

$\overrightarrow{AB} = (0 – 2; 3 + 1) = (- 2; 4)$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$\overrightarrow{BC} = (4 – 0; 5 – 3) = (4; 2)$

$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$\overrightarrow{CA} = (2 – 4; - 1 – 5) = (- 2; - 6)$

$|\overrightarrow{CA}| = \sqrt{(-2)^2 + (-6)^2} = \sqrt{4+36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

$P_{\Delta ABC} = 2\sqrt{5} + 2\sqrt{5} + 2\sqrt{10} = 4\sqrt{5} + 2\sqrt{10}$

2.АК – медиана, по условию, => СК : КВ = 1 : 1, => λ = 1

$X_К = \frac{X_B + \lambda X_C}{1+\lambda} = \frac{0+1\cdot 4}{1+1} = 2$

$У_К = \frac{у_B + \lambda у_C}{1+\lambda} = \frac{3+1\cdot 5}{1+1} = 4$

К(2; 4)

$\overrightarrow{АК} = (2 – 2; 4 + 1) = (0; 5)$

$|\overrightarrow{АК}| = \sqrt{0^2 + 5^2} = \sqrt{25} = 5$

3. $\angle C = \angle(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA})$

$\overrightarrow{CB} = (0 – 4; 3 – 5) = (-4; -2)$

$|\overrightarrow{CB}| = \; = 2\sqrt{5}$

$\cos\angle(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) = \frac{x_{\overrightarrow{CB}} x_{\overrightarrow{CA}} + y_{\overrightarrow{CB}} y_{\overrightarrow{CA}}}{|CB| \cdot |\overrightarrow{CA}|} = \frac{-4\cdot(-2)+(-2)\cdot(-6)}{2\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{10}} = \frac{8+12}{4\sqrt{50}} = \frac{20}{4\sqrt{25\cdot 2}} = \frac{20}{20\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\angle C = \cos\angle(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) = \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = 45°$

Ответ: $P_{\Delta ABC} = 4\sqrt{5} + 2\sqrt{10}$

АК = 5

$\angle C = 45°$

3. Задания для контрольной работы

1. Вычислить предел функции:

Вариант					
1	$\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x^2 - x^3 + 4}{5 - x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-2}{x^3+1}$	$\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-2x-3}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 12x}{3x}$	$\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{3}{x}}$
2	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+3}{1-x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^4+2x-2}{1-2x^4}$	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{4x^2+x}{x-1}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 10x}{x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{2x}$

3	$\lim\limits_{x\to -2}\frac{3x+x^4-1}{2x+1}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4-2}{x^3+5x}$	$\lim\limits_{x\to 6}\frac{x-6}{3-\sqrt{x+3}}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin 3x}{x}$	$\lim\limits_{x\to 0}(1+4x)^{\frac{1}{x}}$
4	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{13-2x+x^2}{1-3x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+5x^3}{4x^3+12}$	$\lim\limits_{x\to -2}\frac{4x-x^3}{x+2}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{2x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{3x}\right)^{x}$
5	$\lim\limits_{x\to -1}\frac{7x-2x^3}{x^2+1}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x^5+x-3}{x^5-2x^4}$	$\lim\limits_{x\to 7}\frac{\sqrt{x+2}-3}{x^2-49}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{5x}$	$\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{3}\right)^{\frac{2}{x}}$
6	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+x+4}{5x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+2x-x^7}{3x^5-1}$	$\lim\limits_{x\to -5}\frac{2x+10}{25-x^2}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{5\sin 4x}{x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{7x}$
7	$\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x^2-x^3+4}{5-x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^4+2x-2}{1-2x^4}$	$\lim\limits_{x\to 6}\frac{x-6}{3-\sqrt{x+3}}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{2x}$	$\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\frac{x}{3}\right)^{\frac{5}{x}}$
8	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+2x-4}{5+x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-2}{x^3+1}$	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{4x^2+x}{x-1}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin 3x}{x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{3x}\right)^{x}$
9	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+3}{1-x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4-2}{x^3+5x}$	$\lim\limits_{x\to -2}\frac{4x-x^3}{x+2}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{5x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{7x}$
10	$\lim\limits_{x\to -2}\frac{3x+x^4-1}{2x+1}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+5x^3}{4x^3+12}$	$\lim\limits_{x\to 7}\frac{\sqrt{x+2}-3}{x^2-49}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{5\sin 4x}{x}$	$\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{3}{x}}$
11	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{13-2x+x^2}{1-3x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x^5+x-3}{x^5-2x^4}$	$\lim\limits_{x\to -5}\frac{2x+10}{25-x^2}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 12x}{3x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{2x}$
12	$\lim\limits_{x\to -1}\frac{7x-2x^3}{x^2+1}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+2x-x^7}{3x^5-1}$	$\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-2x-3}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 10x}{x}$	$\lim\limits_{x\to 0}(1+4x)^{\frac{1}{x}}$
13	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+x+4}{5x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-2}{x^3+1}$	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{4x^2+x}{x-1}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin 3x}{x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{3x}\right)^{x}$
14	$\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x^2-x^3+4}{5-x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4-2}{x^3+5x}$	$\lim\limits_{x\to 7}\frac{\sqrt{x+2}-3}{x^2-49}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 10x}{x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{7x}$
15	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+3}{1-x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x-2}{x^3+x}$	$\lim\limits_{x\to -5}\frac{2x+10}{25-x^2}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{5x}$	$\lim\limits_{x\to 0}(1+4x)^{\frac{1}{x}}$
16	$\lim\limits_{x\to -2}\frac{3x+x^4-1}{2x+1}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x^5+x-3}{x^5-2x^4}$	$\lim\limits_{x\to 7}\frac{3-\sqrt{x+2}}{x^2-49}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{5\sin 4x}{x}$	$\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{3}{x}}$
17	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{13-2x+x^2}{1-3x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+5x^3}{4x^3+12}$	$\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-2x-3}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 12x}{3x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{2x}$
18	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+3}{1-x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+2x-x^7}{3x^5-1}$	$\lim\limits_{x\to 6}\frac{x-6}{3-\sqrt{x+3}}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{2x}$	$\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{5}{x}}$
19	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^2-x+4}{1+x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x^4-2}{x^3+x}$	$\lim\limits_{x\to -1}\frac{x+1}{1-x^2}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{3x}$	$\lim\limits_{x\to 0}(1-6x)^{\frac{1}{x}}$
20	$\lim\limits_{x\to -1}\frac{7x-2x^3}{x^2+1}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4-2}{2x^3+5x}$	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{4x^2-3x}{x-1}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{5\sin 4x}{3x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{5}{x}\right)^{3x}$
21	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+2x-4}{5+x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^4+2x-2}{1-2x^4}$	$\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3-1}{x^2-2x-3}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 10x}{3x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{3x}\right)^{x}$

22	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+6}{1-x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x^5+x-3}{x^5-2x^4}$	$\lim\limits_{x\to5}\frac{2x-10}{25-x^2}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sin 3x}{5x}$	$\lim\limits_{x\to0}(1-4x)^{\frac{2}{x}}$
23	$\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-x-4}{x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+5x^3}{4x^3+2}$	$\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+7x}{x-1}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 8x}{3x}$	$\lim\limits_{x\to0}(1+5x)^{\frac{3}{x}}$
24	$\lim\limits_{x\to0}\frac{7-2x+x^2}{1-3x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+4x-x^7}{x^5-1}$	$\lim\limits_{x\to3}\frac{x^3-27}{x^2-2x-3}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sin 4x}{3x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{3x}$
25	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+3}{1-x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x-2}{x^3+x}$	$\lim\limits_{x\to-1}\frac{x+1}{1-x^2}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 15x}{3x}$	$\lim\limits_{x\to0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}$
26	$\lim\limits_{x\to-2}\frac{3x+x^4-1}{2x+1}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4-2}{x^3+5x}$	$\lim\limits_{x\to1}\frac{46+x}{x-1}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sin 2x}{5x}$	$\lim\limits_{x\to0}(1-5x)^{\frac{2}{x}}$
27	$\lim\limits_{x\to0}\frac{3-2x+x^2}{1-3x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^4+2x-1}{1-2x^4}$	$\lim\limits_{x\to6}\frac{x-6}{3-\sqrt{x+3}}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 12x}{3x}$	$\lim\limits_{x\to0}(1-2x)^{\frac{3}{x}}$
28	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+3}{1-x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^5-1}{x^3+2x}$	$\lim\limits_{x\to-5}\frac{2x+10}{25-x^2}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 5x}{2x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{3x}\right)^{x}$
29	$\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x^2-x^3+7}{5-x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x^5+4x-3}{2x^5-x^4}$	$\lim\limits_{x\to-2}\frac{4x-x^3}{x+2}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sin 3x}{x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{3x}\right)^{x}$
30	$\lim\limits_{x\to-1}\frac{7x-5x^3}{x^2+1}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x+6x^3}{4x^3+12}$	$\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-9}{x^2-2x-3}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 7x}{2x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^{3x}$
31	$\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-2x-4}{x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x-2}{x^3+x}$	$\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+7x}{x-1}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{5\sin 4x}{3x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^{4x}$
32	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+6}{2-x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4-2}{4x^3+3x}$	$\lim\limits_{x\to7}\frac{3-\sqrt{x+2}}{x^2-49}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 11x}{2x}$	$\lim\limits_{x\to0}(1-4x)^{\frac{1}{x}}$

2.Найти дифференциалы следующих функций:

Вариант	**Функция:**				
1	$y = x^3 + 5x - 3$	$y = \frac{4}{x^2} - \sqrt[7]{x^4}$	$y = 7\ln x + \mathrm{ctg}\,x$	$y = 3x^2 \cdot \log_2 x$	$y = \frac{x-1}{x^2-1}$
2	$y = 13x^4 - 2x + 1$	$y = \frac{5}{x^3} - \sqrt[5]{x}$	$y = 4\cos x - 3^x$	$y = x^4 \cdot \sin x$	$y = \frac{1+4x}{1+x^2}$
3	$y = 3x^3 + x - 2$	$y = \frac{1}{x^5} + 15\sqrt{x}$	$y = 4^x - \ln x$	$y = x^3 \cdot e^x$	$y = \frac{1+x^2}{2+3x}$
4	$y = x^3 - 30x + 1$	$y = \frac{7}{x^4} - \sqrt[7]{x^2}$	$y = 5\sin x + \mathrm{ctg}\,x$	$y = 2x^3 \cdot \cos x$	$y = \frac{3-3x}{2x^3}$
5	$y = 4x^4 - 3x + 2$	$y = \frac{8}{x^2} + \sqrt[5]{x^2}$	$y = 2^x + 3\sin x$	$y = 2x^4 \cdot e^x$	$y = \frac{2x-3}{x^3-3}$
6	$y = 6x^3 + 2x - 3$	$y = \frac{3}{x^2} - \sqrt[7]{x^4}$	$y = 4\ln x + \mathrm{ctg}\,x$	$y = 12x^2 \cdot \log_2 x$	$y = \frac{x-7}{x^2-1}$
7	$y = 5x^2 - 2x + 1$	$y = \frac{4}{x^4} + 2\sqrt{x}$	$y = 3\mathrm{tg}\,x + e^x$	$y = x^3 \cdot \sin x$	$y = \frac{2-x^4}{2+3x}$

8	$y = 6x^3 – x + 4$	$y = \frac{3}{x^2} + \sqrt[4]{x^5}$	$y = 3^x – 2\cos x$	$y = 7x^5 \cdot \ln x$	$y = \frac{x^3+1}{1+2x}$
9	$y = \frac{x^6}{6} – 5x + 1$	$y = \frac{5}{x^5} + \sqrt{x}$	$y = 2\sin x+3\cos x$	$y= 5x^2 \cdot e^x$	$y = \frac{2x^2}{1-2x}$
10	$y = 3x^3 – 2x + 1$	$y = \frac{1}{x^4} - \sqrt[5]{x^2}$	$y = \cos x –4ctgx$	$y = x^2 \cdot \log_4 x$	$y = \frac{1+x^2}{x^3}$
11	$y = 3x^4 + \frac{x^2}{5} – 3$	$y = \frac{4}{x} - \sqrt[4]{x^3}$	$y = \cos x - 7e^x$	$y = x^5 \cdot \sin x$	$y = \frac{1-x}{x^3+1}$
12	$y = x^2 + 3x – 2$	$y = \frac{2}{x^2} + \sqrt[3]{x^2}$	$У=2\sin x- \log_2 x$	$y = x^2 \cdot \ln x$	$y = \frac{x^2+4}{x^2-1}$
13	$y = 4x^5 – x^3 + 4$	$y = \frac{2}{x^4} + \sqrt[6]{x^5}$	$y = 3\ln x - tgx$	$y = x^2 \cdot \cos x$	$y = \frac{1-5x}{1+x^2}$
14	$y = 3x^4 – 2x + 12$	$y = \frac{4}{x^3} - \sqrt[5]{x}$	$y = 2\cos x – 3^x$	$y = x^4 \cdot \sin x$	$y = \frac{3+4x}{1+x^2}$
15	$y = 5x^3 + x – 8$	$y = \frac{2}{x^5} + 5\sqrt{x}$	$y = 4^x – \ln x$	$y = x^3 \cdot e^x$	$y = \frac{4+x^2}{2+3x}$
16	$y = 2x^3 – 3x + 1$	$y = \frac{6}{x^4} - \sqrt[7]{x^2}$	$y = 2\sin x + ctgx$	$y = 4x^3 \cdot \cos x$	$y = \frac{1-3x}{2x^3}$
17	$y = 5x^4 – 3x + 6$	$y = \frac{7}{x^2} + \sqrt[5]{x^2}$	$y = 2^x + 3\sin x$	$y = 3x^4 \cdot e^x$	$y = \frac{2x-2}{x^3-3}$
18	$y = 4x^3 + x – 3$	$y = \frac{4}{x^2} - \sqrt[7]{x^4}$	$y = 3\ln x + ctgx$	$y = 5x^2 \cdot \log_2 x$	$y = \frac{x-3}{x^2-1}$
19	$y = 8x^2 – 2x + 4$	$y = \frac{3}{x^4} + 2\sqrt{x}$	$y = 2tgx + e^x$	$y = 3x^3 \cdot \sin x$	$y = \frac{2-x^4}{1+3x}$
20	$y = 3x^3 – x + 2$	$y = \frac{4}{x^2} + \sqrt[4]{x^5}$	$y = 3^x – 4\cos x$	$y = 2x^5 \cdot \ln x$	$y = \frac{x^3+2}{1+2x}$
21	$y = \frac{x^6}{3} – 5x + 13$	$y = \frac{2}{x^5} + \sqrt{x}$	$y = 2\sin x + \cos x$	$y= 3x^2 \cdot e^x$	$y = \frac{2x^2}{1-3x}$
22	$y = 8x^3 – 2x + 4$	$y = \frac{2}{x^4} - \sqrt[5]{x^2}$	$y =3\cos x – ctgx$	$y = 2x^2 \cdot \log_4 x$	$y = \frac{3+x^2}{x^3}$
23	$y = 6x^4 + \frac{x^2}{2} – 3$	$y = \frac{1}{x} - \sqrt[4]{x^3}$	$y = \cos x - 2e^x$	$y = x^5 \cdot \sin x$	$y = \frac{4-x}{x^3+1}$
24	$y = 4x^2 + x – 2$	$y = \frac{5}{x^2} + \sqrt[3]{x^2}$	$y=2\sin x -\log_3 x$	$y = x^3 \cdot \ln x$	$y = \frac{x^2+2}{x^2-1}$
25	$y = 2x^5 – x^3 + 1$	$y = \frac{3}{x^4} + \sqrt[6]{x^5}$	$y = 4\ln x - tgx$	$y = x \cdot \cos x$	$y = \frac{1-2x}{1+x^2}$
26	$y = x^3 + 5x – 3$	$y = \frac{5}{x^3} - \sqrt[5]{x}$	$y = 4^x – \ln x$	$y = 2x^3 \cdot \cos x$	$y = \frac{2x-3}{x^3-3}$
27	$y = 13x^4 – 2x + 1$	$y = \frac{1}{x^5} +5\sqrt{x}$	$y = 5\sin x + ctgx$	$y = 2x^4 \cdot e^x$	$y = \frac{x-7}{x^2-1}$
28	$y = 3x^3 + x – 2$	$y = \frac{7}{x^4} - \sqrt[7]{x^2}$	$y = 2^x + 3\sin x$	$y =12x^2 \cdot \log_2 x$	$y = \frac{2-x^4}{2+3x}$
29	$y = x^3 – 30x + 1$	$y = \frac{8}{x^2} + \sqrt[5]{x^2}$	$y = 4\ln x + ctgx$	$y = x^3 \cdot \sin x$	$y = \frac{x^3+1}{1+2x}$

30	$y = 4x^4 - 3x + 2$	$y = \frac{3}{x^2} - \sqrt[7]{x^4}$	$y = 3tgx + e^x$	$y = 7x^5 \cdot \ln x$	$y = \frac{2x^2}{1-2x}$
31	$y = 6x^3 + 2x - 3$	$y = \frac{4}{x^4} + 2\sqrt{x}$	$y = 3^x - 2\cos x$	$y = 5x^2 \cdot e^x$	$y = \frac{1+x^2}{x^3}$
32	$y = 5x^2 - 2x + 1$	$y = \frac{3}{x^2} + \sqrt[4]{x^5}$	$y = 2\sin x + 3\cos x$	$y = x^2 \cdot \log_4 x$	$y = \frac{1-x}{x^3+1}$

3. Дана функция *z* = *f(x, y).* Найти частные производные первого и второго порядка f'_x ; f'_y ; f''_{xx} ; f''_{xy} ; f''_{yy} ; f''_{yx}

Вариант		**Вариант**	
1	$Z = 3x^4 \cdot \cos y$	**17**	$Z = 4y^5 \cdot \sin x$
2	$Z = 2y^5 \cdot \sin x$	**18**	$Z = 3e^x \cdot y^4$
3	$Z = e^x \cdot y^5$	**19**	$Z = 3y^2 \cdot \ln x$
4	$Z = 5^y \cdot x^3$	**20**	$Z = 2y^3 \cdot \cos x$
5	$Z = 4x^3 \cdot \sin y$	**21**	$Z = 3x^3 \cdot \sin y$
6	$Z = 3y^5 \cdot \cos x$	**22**	$Z = 4^y \cdot x^5$
7	$Z = x^4 \cdot \ln y$	**23**	$Z = 2x^5 \cdot \cos y$
8	$Z = 2e^x \cdot y^3$	**24**	$Z = x^3 \cdot \ln y$
9	$Z = 2x^3 \cdot \cos y$	**25**	$Z = 3y^2 \cdot \cos x$
10	$Z = 5y^2 \cdot \ln x$	**26**	$Z = 5y^3 \cdot \ln x$
11	$Z = 2y^5 \cdot \cos x$	**27**	$Z = 4x^5 \cdot \sin y$
12	$Z = 3y^4 \cdot \sin x$	**28**	$Z = 4e^x \cdot y^2$
13	$Z = 4x^5 \cdot \ln y$	**29**	$Z = 3x^2 \cdot \ln y$
14	$Z = 2x^4 \cdot \sin y$	**30**	$Z = 2y^3 \cdot \ln x$
15	$Z = 3^y \cdot x^4$	**31**	$Z = 2y^6 \cdot \sin x$
16	$Z = 4x^5 \cdot \cos y$	**32**	$Z = 4^y \cdot x^6$

3. **Вычислить неопределенный интеграл:**

Вариант	Методом непосредственного интегрирования		
1	1) $\int\left(4x^5-\frac{x}{4}+2\right)dx$	2) $\int\left(\frac{2}{x^7}+\frac{7}{x}\right)dx$	3) $\int\left(\sqrt[5]{x^7}+e^x-4\sin x\right)dx$
2	1) $\int(3x^5-5x+8)dx$	2) $\int\left(\frac{1}{x^7}+\frac{3}{x}\right)dx$	3) $\int\left(\sqrt[5]{x^6}+e^x-\sin x\right)dx$
3	1) $\int(5x^2+x-10)dx$	2) $\int\left(\frac{13}{x^2}-\frac{7}{x}\right)dx$	3) $\int\left(\sqrt[4]{x^7}+3\sin x-\cos x\right)dx$
4	1) $\int\left(3x^5-\frac{x}{4}+3\right)dx$	2) $\int\left(\frac{2}{x^8}+\frac{8}{x}\right)dx$	3) $\int\left(\sqrt[5]{x^4}+5e^x-2\sin x\right)dx$
5	1) $\int(3x^2-6x+0{,}5)dx$	2) $\int\left(\frac{3}{x^4}+\frac{2}{x}\right)dx$	3) $\int\left(\sqrt[8]{x^5}+3e^x-6^x\right)dx$
6	1) $\int(7x^4-3x+14)dx$	2) $\int\left(\frac{9}{x^3}+\frac{5}{x}\right)dx$	3) $\int\left(\sqrt[7]{x^5}+4e^x-2\sin x\right)dx$
7	1) $\int(3x^5-x+7)dx$	2) $\int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{6}{x}\right)dx$	3) $\int\left(\sqrt[7]{x^6}+9^x-4\cos x\right)dx$
8	1) $\int(3x^4+0{,}2x-8)dx$	2) $\int\left(\frac{3}{x^5}+\frac{4}{x}\right)dx$	3) $\int\left(\sqrt[5]{x^2}+5^x-3\sin x\right)dx$
9	1) $\int(x^9-2x+5)dx$	2) $\int\left(\frac{3}{x^4}-\frac{6}{x}\right)dx$	3) $\int\left(\sqrt[7]{x^5}+4e^x-3^x\right)dx$
10	1) $\int\left(2x^5-\frac{1}{3}x+1\right)dx$	2) $\int\left(\frac{1}{x^2}+\frac{8}{x}\right)dx$	3) $\int\left(\sqrt[5]{x^4}+e^x-4\sin x\right)dx$
11	1) $\int(5x^3-7x+2)dx$	2) $\int\left(\frac{4}{x^5}-\frac{2}{x}\right)dx$	3) $\int\left(\sqrt[5]{x^3}+8^x-\cos x\right)dx$

12	1) $\int (3x^3 + 0{,}5x - 1)\text{dx}$	2)$\int \left(\frac{3}{x^3} - \frac{2}{x}\right) dx$	3)$\int \left(\sqrt[4]{x^3} + 4\sin - 2\cos \text{x}\right)\text{dx}$
13	1) $\int (4x^3 + 2x - 5)\text{dx}$	2)$\int \left(\frac{6}{x^4} - \frac{5}{x}\right) dx$	3)$\int \left(\sqrt[6]{\text{x}} + 2\cos \text{x} - 3^{\text{x}}\right)\text{dx}$
14	1) $\int (2x^5 - 3x + 8)\text{dx}$	2)$\int \left(\frac{1}{x^5} + \frac{3}{x}\right) dx$	3)$\int \left(\sqrt[5]{x^2} + 7^x - \sin \text{x}\right)\text{dx}$
15	1) $\int (2x^2 + 7x - 10)\text{dx}$	2)$\int \left(\frac{4}{x^2} - \frac{3}{x}\right) dx$	3)$\int \left(\sqrt[4]{x^3} + 3\sin \text{x} - 2\cos \text{x}\right)\text{dx}$
16	1) $\int \left(3x^5 - \frac{x}{2} + 7\right)\text{dx}$	2)$\int \left(\frac{2}{x^2} + \frac{8}{x}\right) dx$	3)$\int \left(\sqrt[5]{x^3} + 5e^x - \sin \text{x}\right)\text{dx}$
17	1) $\int (3x^2 - 2x + 0{,}5)\text{dx}$	2)$\int \left(\frac{3}{x^4} + \frac{7}{x}\right) dx$	3)$\int \left(\sqrt[8]{x^3} + 3e^x - 2^x\right)\text{dx}$
18	1) $\int (6x^4 - x + 4)\text{dx}$	2)$\int \left(\frac{1}{x^3} + \frac{6}{x}\right) dx$	3)$\int \left(\sqrt[7]{x^5} + 2e^x - 4\sin \text{x}\right)\text{dx}$
19	1) $\int (5x^4 - 3x + 2)\text{dx}$	2)$\int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\right) dx$	3)$\int \left(\sqrt[7]{x^3} + 4^x - 5\cos \text{x}\right)\text{dx}$
20	1) $\int (2x^4 + 8x - 4)\text{dx}$	2)$\int \left(\frac{7}{x^5} + \frac{4}{x}\right) dx$	3)$\int \left(\sqrt[5]{x^3} + 2^x - 2\sin \text{x}\right)\text{dx}$
21	1) $\int (x^2 - 7x + 2)\text{dx}$	2)$\int \left(\frac{3}{x^4} - \frac{5}{x}\right) dx$	3)$\int \left(\sqrt[7]{x^3} + e^x - 4^x\right)\text{dx}$
22	1) $\int \left(6x^5 - \frac{1}{2}x + 1\right)\text{dx}$	2)$\int \left(\frac{12}{x^2} + \frac{3}{x}\right) dx$	3)$\int \left(\sqrt[5]{x^2} + e^x - 5\sin \text{x}\right)\text{dx}$
23	1) $\int (5x^4 - 2x + 12)\text{dx}$	2)$\int \left(\frac{4}{x^2} - \frac{2}{x}\right) dx$	3)$\int \left(\sqrt[5]{x^3} + 2^x - 3\cos \text{x}\right)\text{dx}$

24	1) $\int (3x^2+5x-1)\mathrm{dx}$	2) $\int \left(\frac{1}{x^3}-\frac{3}{x}\right)dx$	3) $\int \left(\sqrt[4]{x^3}+2\sin x-\cos x\right)\mathrm{dx}$
25	1) $\int (4x^3+x-3)\mathrm{dx}$	2) $\int \left(\frac{2}{x^4}-\frac{5}{x}\right)dx$	3) $\int \left(\sqrt[3]{x}+\cos x-6^x\right)\mathrm{dx}$
26	1) $\int \left(4x^5-\frac{x}{4}+2\right)\mathrm{dx}$	2) $\int \left(\frac{1}{x^7}+\frac{3}{x}\right)dx$	3) $\int \left(\sqrt[4]{x^7}+3\sin x-\cos x\right)\mathrm{dx}$
27	1) $\int (3x^5-5x+8)\mathrm{dx}$	2) $\int \left(\frac{13}{x^2}-\frac{7}{x}\right)dx$	3) $\int \left(\sqrt[5]{x^4}+5e^x-2\sin x\right)\mathrm{dx}$
28	1) $\int (5x^2+x-10)\mathrm{dx}$	2) $\int \left(\frac{2}{x^8}+\frac{8}{x}\right)dx$	3) $\int \left(\sqrt[8]{x^5}+3e^x-6^x\right)\mathrm{dx}$
29	1) $\int \left(3x^5-\frac{x}{4}+3\right)\mathrm{dx}$	2) $\int \left(\frac{3}{x^4}+\frac{2}{x}\right)dx$	3) $\int \left(\sqrt[7]{x^5}+4e^x-2\sin x\right)\mathrm{dx}$
30	1) $\int (3x^2-6x+0{,}5)\mathrm{dx}$	2) $\int \left(\frac{9}{x^3}+\frac{5}{x}\right)dx$	3) $\int \left(\sqrt[7]{x^6}+9^x-4\cos x\right)\mathrm{dx}$
31	1) $\int (7x^4-3x+14)\mathrm{dx}$	2) $\int \left(\frac{1}{x^2}-\frac{6}{x}\right)dx$	3) $\int \left(\sqrt[5]{x^2}+5^x-3\sin x\right)\mathrm{dx}$
32	1) $\int (3x^5-x+7)\mathrm{dx}$	2) $\int \left(\frac{3}{x^5}+\frac{4}{x}\right)dx$	3) $\int \left(\sqrt[7]{x^5}+4e^x-3^x\right)\mathrm{dx}$

4. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

Вариант		**Вариант**	
1	$y=1-x^2$, $y=0$	**17**	$y=x^2+1$, $x=-1$, $x=1$, $y=0$
2	$y=4-x^2$, $y=0$	**18**	$y=2x^2$, $x=-1$, $x=2$, $y=0$
3	$y=9-x^2$, $y=0$	**19**	$y=2x^2$, $x=-2$, $x=1$, $y=0$
4	$y=x^2+1$, $x=-1$, $x=2$, $y=0$	**20**	$y=x^2+1$, $x=-2$, $x=0$, $y=0$
5	$y=x^2+2$, $x=-2$, $x=1$, $y=0$	**21**	$y=x^2+1$, $x=0$, $x=1$, $y=0$
6	$y=x^2-1$, $x=1$, $x=2$, $y=0$	**22**	$y=x^2+2$, $x=-1$, $x=1$, $y=0$
7	$y=x^2-4$, $x=2$, $x=3$, $y=0$	**23**	$y=x^2+3$, $x=-1$, $x=0$, $y=0$
8	$y=x^2+3$, $x=0$, $x=1$, $y=0$	**24**	$y=x^2+2$, $x=-1$, $x=2$, $y=0$

9	y= x^3 +1, x= -1, x=1, y=0	**25**	y= x^2+1, x=0, x=2, y=0
10	y= x^3 +1, x=0, x=1, y=0	**26**	y= x^3 +1, x=0, x=1, y=0
11	y= x^3 -1, x=1, x=2, y=0	**27**	y= x^3 -1, x=1, x=2, y=0
12	y = -x^3 -1, x= -2, x= -1, y=0	**28**	y = -x^3 -1, x= -2, x= -1, y=0
13	y = -x^3 +1, x= -1, x=1, y=0	**29**	y = -x^3 +1, x= -1, x=1, y=0
14	y = x^3 +2, x= -1, x=1, y=0	**30**	y = x^3 +2, x= -1, x=1, y=0
15	y= x^2 +4, x= -1, x=1, y=0	**31**	y= x^2 +4, x= -1, x=1, y=0
16	y= x^2 +3, x=0, x=1, y=0	**32**	y= x^2 +3, x=0, x=1, y=0

5.Решить задачу:

Вариант	**Задача:**
1	Дан треугольник ABC, точка M – середина стороны BC, $\overline{AM} = \bar{а}$, $\overline{AC} = \bar{в}$. Разложить по векторам $\bar{а}$ и $\bar{в}$ векторы $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CM}$
2	Дан треугольник ABC, точка L – середина стороны AB, $\overline{CL} = \bar{а}$, $\overline{AC} = \bar{в}$. Разложить по векторам $\bar{а}$ и $\bar{в}$ векторы $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{BL}$
3	Дан треугольник ABC, точка M – середина стороны AC, $\overline{BM} = \bar{а}$, $\overline{AB} = \bar{в}$. Разложить по векторам $\bar{а}$ и $\bar{в}$ векторы $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{MA}$
4	Дан треугольник ABC, точка S – середина стороны BC, $\overline{AB} = \bar{а}$, $\overline{AS} = \bar{в}$. Разложить по векторам $\bar{а}$ и $\bar{в}$ векторы $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{SB}$
5	Дан треугольник ABC, точка N – середина стороны BC, $\overline{AN} = \bar{а}$, $\overline{AC} = \bar{в}$. Разложить по векторам $\bar{а}$ и $\bar{в}$ векторы $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CN}$
6	Дан треугольник ABC, точка D – середина стороны AB, $\overline{CD} = \bar{а}$, $\overline{AC} = \bar{в}$. Разложить по векторам $\bar{а}$ и $\bar{в}$ векторы $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{BD}$
7	Дан треугольник ABC, точка T – середина стороны BC, $\overline{AB} = \bar{а}$, $\overline{AT} = \bar{в}$. Разложить по векторам $\bar{а}$ и $\bar{в}$ векторы $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{TB}$
8	Дан треугольник ABC, точка S – середина стороны AC, $\overline{BS} = \bar{а}$, $\overline{AB} = \bar{в}$. Разложить по векторам $\bar{а}$ и $\bar{в}$ векторы $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{SA}$
9	Дан треугольник ABC, точка R – середина стороны BC, $\overline{AB} = \bar{а}$, $\overline{AR} = \bar{в}$. Разложить по векторам $\bar{а}$ и $\bar{в}$ векторы $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{RB}$
10	Дан треугольник ABC, точка K – середина стороны BC, $\overline{AK} = \bar{а}$, $\overline{AC} = \bar{в}$. Разложить по векторам $\bar{а}$ и $\bar{в}$ векторы $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CK}$
11	Дан треугольник ABC, точка P – середина стороны AB, $\overline{CP} = \bar{а}$, $\overline{AC} = \bar{в}$. Разложить по векторам $\bar{а}$ и $\bar{в}$ векторы $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{BP}$
12	Дан треугольник ABC, точка N – середина стороны AC, $\overline{BN} = \bar{а}$, $\overline{AB} = \bar{в}$.

	Разложить по векторам $\bar{а}$ и $\bar{в}$ векторы $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{NA}$
13	Дан треугольник АВС, точка Р – середина стороны ВС, $\overline{AB} = \bar{а}, \overline{AP} = \bar{в}$. Разложить по векторам $\bar{а}$ и $\bar{в}$ векторы $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{PB}$
14	Дан треугольник АВС, точка S – середина стороны ВС, $\overline{AS} = \bar{а}$, $\overline{AC} = \bar{в}$. Разложить по векторам $\bar{а}$ и $\bar{в}$ векторы $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CS}$
15	Дан треугольник АВС, точка F – середина стороны АВ, $\overline{CF} = \bar{а}$, $\overline{AC} = \bar{в}$. Разложить по векторам $\bar{а}$ и $\bar{в}$ векторы $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{BF}$
16	Дан треугольник АВС, точка L – середина стороны ВС, $\overline{AB} = \bar{а}, \overline{AL} = \bar{в}$. Разложить по векторам $\bar{а}$ и $\bar{в}$ векторы $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{LB}$
17	Дан треугольник АВС, точка Р – середина стороны АС, $\overline{BP} = \bar{а}$, $\overline{AB} = \bar{в}$. Разложить по векторам $\bar{а}$ и $\bar{в}$ векторы $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{PA}$
18	Дан треугольник АВС, точка D – середина стороны ВС, $\overline{AD} = \bar{а}$, $\overline{AC} = \bar{в}$. Разложить по векторам $\bar{а}$ и $\bar{в}$ векторы $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$
19	Дан треугольник АВС, точка N – середина стороны АВ, $\overline{CN} = \bar{а}$, $\overline{AC} = \bar{в}$. Разложить по векторам $\bar{а}$ и $\bar{в}$ векторы $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{BN}$
20	Дан треугольник АВС, точка К – середина стороны ВС, $\overline{AB} = \bar{а}, \overline{AK} = \bar{в}$. Разложить по векторам $\bar{а}$ и $\bar{в}$ векторы $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{KB}$
21	Дан треугольник АВС, точка L – середина стороны АС, $\overline{BL} = \bar{а}$, $\overline{AB} = \bar{в}$. Разложить по векторам $\bar{а}$ и $\bar{в}$ векторы $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{LA}$
22	Дан треугольник АВС, точка F – середина стороны ВС, $\overline{AF} = \bar{а}$, $\overline{AC} = \bar{в}$. Разложить по векторам $\bar{а}$ и $\bar{в}$ векторы $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CF}$
23	Дан треугольник АВС, точка N – середина стороны ВС, $\overline{AB} = \bar{а}, \overline{AN} = \bar{в}$. Разложить по векторам $\bar{а}$ и $\bar{в}$ векторы $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{NB}$
24	Дан треугольник АВС, точка Н – середина стороны АС, $\overline{BH} = \bar{а}$, $\overline{AB} = \bar{в}$. Разложить по векторам $\bar{а}$ и $\bar{в}$ векторы $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{HA}$
25	Дан треугольник АВС, тоска Р – середина стороны ВС, $\overline{AP} = \bar{а}$, $\overline{AC} = \bar{в}$. Разложить по векторам $\bar{а}$ и $\bar{в}$ векторы $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CP}$
26	Дан треугольник АВС, точка К – середина стороны АВ, $\overline{CK} = \bar{а}$, $\overline{AC} = \bar{в}$. Разложить по векторам $\bar{а}$ и $\bar{в}$ векторы $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{BK}$
27	Дан треугольник АВС, точка М – середина стороны ВС, $\overline{AB} = \bar{а}, \overline{AM} = \bar{в}$. Разложить по векторам $\bar{а}$ и $\bar{в}$ векторы $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{MB}$

28	Дан треугольник ABC, точка V – середина стороны AC, $\overline{BV}$ = ā, $\overline{AB}$ = в̄. Разложить по векторам ā и в̄ векторы $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{VA}$
29	Дан треугольник ABC, точка R – середина стороны BC, $\overline{AR}$ = ā, $\overline{AC}$ = в̄. Разложить по векторам ā и в̄ векторы $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CR}$
30	Дан треугольник ABC, точка M – середина стороны AB, $\overline{CM}$ = ā, $\overline{AC}$ = в̄. Разложить по векторам ā и в̄ векторы $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{BM}$
31	Дан треугольник ABC, точка L – середина стороны AB, $\overline{CL}$ = ā, $\overline{AC}$ = в̄. Разложить по векторам ā и в̄ векторы $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{BL}$
32	Дан треугольник ABC, точка M – середина стороны AC, $\overline{BM}$ = ā, $\overline{AB}$ = в̄. Разложить по векторам ā и в̄ векторы $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{MA}$

6. Найти длину вектора:

1	$\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$,если $\vec{a}$ = (2; - 3; 1), $\vec{b}$ = (4; 5; 2)
2	$\vec{к} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$, если $\vec{a}$ = (2; 3; - 1), $\vec{b}$ = (-4; 1; 5)
3	$\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$, если $\vec{a}$ = (7; 0; 2), $\vec{b}$ = (4; -3; 1)
4	$\vec{p} = 4\vec{a} + 3\vec{b}$, если $\vec{a}$ = (8; - 1; - 2), $\vec{b}$ = (3; 0; -2)
5	$\vec{c} = 4\vec{a} - 3\vec{b}$, если $\vec{a}$ = (-1; - 3; 1), $\vec{b}$ = (0; 5; - 2)
6	$\vec{к} = 2\vec{a} + 4\vec{b}$, если $\vec{a}$ = (2; 0; -3), $\vec{b}$ = (4; 1; - 2)
7	$\vec{c} = 5\vec{a} - 3\vec{b}$, если $\vec{a}$ = (1; 0; - 2), $\vec{b}$ = (2; -3; - 4)
8	$\vec{p} = \vec{a} + 3\vec{b}$, если $\vec{a}$ = (-3; - 1; 2), $\vec{b}$ = (4; -2; - 3)
9	$\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$, если $\vec{a}$ = (1; - 3; 1), $\vec{b}$ = (4; 3; 2)
10	$\vec{к} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$, если $\vec{a}$ = (4; 3; - 1), $\vec{b}$ = (-5; 1; 2)
11	$\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$, если $\vec{a}$ = (5; 0; - 1), $\vec{b}$ = (1; -4; 1)
12	$\vec{p} = 4\vec{a} + 3\vec{b}$, если $\vec{a}$ = (3; - 1; - 5), $\vec{b}$ = (3; 1; -2)
13	$\vec{c} = 4\vec{a} - 3\vec{b}$, если $\vec{a}$ = (-2; - 3; 1), $\vec{b}$ = (0; - 3; - 2)
14	$\vec{к} = 2\vec{a} + 4\vec{b}$, если $\vec{a}$ = (2; 3; -3), $\vec{b}$ = (- 4; 1; - 2)
15	$\vec{c} = 5\vec{a} - 3\vec{b}$, если $\vec{a}$ = (- 2; 0; - 2), $\vec{b}$ = (2; -1; - 4)
16	$\vec{p} = \vec{a} + 3\vec{b}$, если $\vec{a}$ = (-3; - 1; 3), $\vec{b}$ = (1; -2; - 3)
17	$\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$, если $\vec{a}$ = (2; - 2; 1), $\vec{b}$ = (4; 5; 3)

18	$\vec{к} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$, если $\vec{a} = (1;\ 3;\ -1)$, $\vec{b} = (-4;\ 0;\ 5)$
19	$\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$, если $\vec{a} = (7;\ -2;\ 2)$, $\vec{b} = (2;\ -3;\ 1)$
20	$\vec{p} = 4\vec{a} + 3\vec{b}$, если $\vec{a} = (4;\ -1;\ -2)$, $\vec{b} = (3;\ 1;\ -2)$
21	$\vec{c} = 4\vec{a} - 3\vec{b}$, если $\vec{a} = (-2;\ -3;\ 1)$, $\vec{b} = (3;\ 5;\ -2)$
22	$\vec{к} = 2\vec{a} + 4\vec{b}$, если $\vec{a} = (2;\ -4;\ -3)$, $\vec{b} = (4;\ 1;\ -3)$
23	$\vec{c} = 5\vec{a} - 3\vec{b}$, если $\vec{a} = (2;\ 1;\ -2)$, $\vec{b} = (2;\ -3;\ -2)$
24	$\vec{p} = \vec{a} + 3\vec{b}$, если $\vec{a} = (-2;\ -1;\ 3)$, $\vec{b} = (4;\ -4;\ -3)$
25	$\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$, если $\vec{a} = (-2;\ -3;\ 1)$, $\vec{b} = (4;\ 3;\ 2)$
26	$\vec{к} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$, если $\vec{a} = (2;\ 1;\ -1)$, $\vec{b} = (-4;\ 1;\ 3)$
27	$\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$, если $\vec{a} = (5;\ 0;\ -1)$, $\vec{b} = (4;\ -2;\ 1)$
28	$\vec{p} = 4\vec{a} + 3\vec{b}$, если $\vec{a} = (8;\ -1;\ -1)$, $\vec{b} = (3;\ 1;\ -2)$
29	$\vec{c} = 4\vec{a} - 3\vec{b}$, если $\vec{a} = (-4;\ -3;\ 1)$, $\vec{b} = (0;\ 2;\ -2)$
30	$\vec{к} = 2\vec{a} + 4\vec{b}$, если $\vec{a} = (2;\ 1;\ -3)$, $\vec{b} = (4;\ 1;\ -3)$
31	$\vec{c} = 5\vec{a} - 3\vec{b}$, если $\vec{a} = (1;\ 4;\ -2)$, $\vec{b} = (3;\ -3;\ -1)$
32	$\vec{p} = \vec{a} + 3\vec{b}$, если $\vec{a} = (-2;\ -1;\ 3)$, $\vec{b} = (4;\ -2;\ -2)$

7. Найти значение произведения:

1	$(\vec{c} - 2\overrightarrow{a)} \cdot 3\vec{b}$, если $\lvert\vec{a}\rvert = 4$, $\lvert\vec{b}\rvert = 5$, $\lvert\vec{c}\rvert = 2$, $\angle(\vec{a};\vec{b}) = 30°$, $\angle(\vec{b};\ \vec{c}) = 60°$
2	$\vec{c} - 2\overrightarrow{a)} \cdot 2\vec{b}$, если $\lvert\vec{a}\rvert = 4$, $\lvert\vec{b}\rvert = 1$, $\lvert\vec{c}\rvert = 2$, $\angle(\vec{a};\vec{b}) = 60°$, $\angle(\vec{b};\ \vec{c}) = 90°$
3	$(\vec{c} - 4\overrightarrow{a)} \cdot \vec{b}$, если $\lvert\vec{a}\rvert = 1$, $\lvert\vec{b}\rvert = 6$, $\lvert\vec{c}\rvert = 3$, $\angle(\vec{a};\vec{b}) = 90°$, $\angle(\vec{b};\ \vec{c}) = 45°$
4	$(\vec{c} - 5\overrightarrow{a)} \cdot 2\vec{b}$, если $\lvert\vec{a}\rvert = 3$, $\lvert\vec{b}\rvert = 1$, $\lvert\vec{c}\rvert = 1$, $\angle(\vec{a};\vec{b}) = 30°$, $\angle(\vec{b};\ \vec{c}) = 45°$
5	$(\vec{c} - 2\overrightarrow{a)} \cdot 3\vec{b}$, если $\lvert\vec{a}\rvert = 1$, $\lvert\vec{b}\rvert = 3$, $\lvert\vec{c}\rvert = 2$, $\angle(\vec{a};\vec{b}) = 30°$, $\angle(\vec{b};\ \vec{c}) = 60°$
6	$(\vec{c} - 2\overrightarrow{a)} \cdot 3\vec{b}$, если $\lvert\vec{a}\rvert = 3$, $\lvert\vec{b}\rvert = 3$, $\lvert\vec{c}\rvert = 1$, $\angle(\vec{a};\vec{b}) = 60°$, $\angle(\vec{b};\ \vec{c}) = 90°$
7	$(\vec{c} - 4\overrightarrow{a)} \cdot \vec{b}$, если $\lvert\vec{a}\rvert = 1$, $\lvert\vec{b}\rvert = 2$, $\lvert\vec{c}\rvert = 3$, $\angle(\vec{a};\vec{b}) = 90°$, $\angle(\vec{b};\ \vec{c}) = 45°$
8	$(\vec{c} - 5\overrightarrow{a)} \cdot 2\vec{b}$, если $\lvert\vec{a}\rvert = 3$, $\lvert\vec{b}\rvert = 2$, $\lvert\vec{c}\rvert = 5$, $\angle(\vec{a};\vec{b}) = 30°$, $\angle(\vec{b};\ \vec{c}) = 45°$

9	$(\vec{c} - \overrightarrow{2a}) \cdot 3\vec{b}$, если $\lvert\vec{a}\rvert = 1,\ \lvert\vec{b}\rvert = 3,\ \lvert\vec{c}\rvert = 6,\ \angle(\vec{a};\vec{b}) = 30°,\ \angle(\vec{b};\ \vec{c}) = 60°$
10	$(\vec{c} - \overrightarrow{2a}) \cdot 2\vec{b}$, если $\lvert\vec{a}\rvert = 2,\ \lvert\vec{b}\rvert = 3,\ \lvert\vec{c}\rvert = 5,\ \angle(\vec{a};\vec{b}) = 60°,\ \angle(\vec{b};\ \vec{c}) = 90°$
11	$(\vec{c} - \overrightarrow{4a}) \cdot \vec{b}$, если $\lvert\vec{a}\rvert = 7,\ \lvert\vec{b}\rvert = 1,\ \lvert\vec{c}\rvert = 4,\ \angle(\vec{a};\vec{b}) = 90°,\ \angle(\vec{b};\ \vec{c}) =45°$
12	$(\vec{c} - \overrightarrow{5a}) \cdot 2\vec{b}$, если $\lvert\vec{a}\rvert = 2,\ \lvert\vec{b}\rvert = 5,\ \lvert\vec{c}\rvert = 1,\ \angle(\vec{a};\vec{b}) = 30°,\ \angle(\vec{b};\ \vec{c}) = 45°$
13	$(\vec{c} - \overrightarrow{2a}) \cdot 3\vec{b}$, если $\lvert\vec{a}\rvert = 4,\ \lvert\vec{b}\rvert = 3,\ \lvert\vec{c}\rvert = 1,\ \angle(\vec{a};\vec{b}) = 30°,\ \angle(\vec{b};\ \vec{c}) = 60°$
14	$(\vec{c} - \overrightarrow{2a}) \cdot 3\vec{b}$, если $\lvert\vec{a}\rvert = 2,\ \lvert\vec{b}\rvert = 1,\ \lvert\vec{c}\rvert = 1,\ \angle(\vec{a};\vec{b}) = 60°,\ \angle(\vec{b};\ \vec{c}) = 90°$
15	$(\vec{c} - \overrightarrow{4a}) \cdot \vec{b}$, если $\lvert\vec{a}\rvert = 5,\ \lvert\vec{b}\rvert = 2,\ \lvert\vec{c}\rvert = 2,\ \angle(\vec{a};\vec{b}) = 90°,\ \angle(\vec{b};\ \vec{c}) =45°$
16	$(\vec{c} - \overrightarrow{5a}) \cdot 2\vec{b}$, если $\lvert\vec{a}\rvert = 3,\ \lvert\vec{b}\rvert = 4,\ \lvert\vec{c}\rvert = 1,\ \angle(\vec{a};\vec{b}) = 30°,\ \angle(\vec{b};\ \vec{c}) = 45°$
17	$(\vec{c} - \overrightarrow{2a}) \cdot 3\vec{b}$, если $\lvert\vec{a}\rvert = 4,\ \lvert\vec{b}\rvert = 6,\ \lvert\vec{c}\rvert = 3,\ \angle(\vec{a};\vec{b}) = 30°,\ \angle(\vec{b};\ \vec{c}) = 60°$
18	$(\vec{c} - \overrightarrow{2a}) \cdot 2\vec{b}$, если $\lvert\vec{a}\rvert = 2,\ \lvert\vec{b}\rvert = 5,\ \lvert\vec{c}\rvert = 2,\ \angle(\vec{a};\vec{b}) = 60°,\ \angle(\vec{b};\ \vec{c}) = 90°$
19	$(\vec{c} - \overrightarrow{4a}) \cdot \vec{b}$, если $\lvert\vec{a}\rvert = 3,\ \lvert\vec{b}\rvert = 2,\ \lvert\vec{c}\rvert = 3,\ \angle(\vec{a};\vec{b}) = 90°,\ \angle(\vec{b};\ \vec{c}) =45°$
20	$(\vec{c} - \overrightarrow{5a}) \cdot 2\vec{b}$, если $\lvert\vec{a}\rvert = 3,\ \lvert\vec{b}\rvert = 4,\ \lvert\vec{c}\rvert = 1,\ \angle(\vec{a};\vec{b}) = 30°,\ \angle(\vec{b};\ \vec{c}) = 45°$
21	$(\vec{c} - \overrightarrow{2a}) \cdot 3\vec{b}$, если $\lvert\vec{a}\rvert = 1,\ \lvert\vec{b}\rvert = 4,\ \lvert\vec{c}\rvert = 3,\ \angle(\vec{a};\vec{b}) = 30°,\ \angle(\vec{b};\ \vec{c}) = 60°$
22	$(\vec{c} - \overrightarrow{2a}) \cdot 3\vec{b}$, если $\lvert\vec{a}\rvert = 4,\ \lvert\vec{b}\rvert = 2,\ \lvert\vec{c}\rvert = 1,\ \angle(\vec{a};\vec{b}) = 60°,\ \angle(\vec{b};\ \vec{c}) = 90°$
23	$(\vec{c} - \overrightarrow{4a}) \cdot \vec{b}$, если $\lvert\vec{a}\rvert = 5,\ \lvert\vec{b}\rvert = 2,\ \lvert\vec{c}\rvert = 1,\ \angle(\vec{a};\vec{b}) = 90°,\ \angle(\vec{b};\ \vec{c}) =45°$
24	$(\vec{c} - \overrightarrow{5a}) \cdot 2\vec{b}$, если $\lvert\vec{a}\rvert = 4,\ \lvert\vec{b}\rvert = 2,\ \lvert\vec{c}\rvert = 2,\ \angle(\vec{a};\vec{b}) = 30°,\ \angle(\vec{b};\ \vec{c}) = 45°$
25	$(\vec{c} - \overrightarrow{2a}) \cdot 3\vec{b}$, если $\lvert\vec{a}\rvert = 4,\ \lvert\vec{b}\rvert = 4,\ \lvert\vec{c}\rvert = 2,\ \angle(\vec{a};\vec{b}) = 30°,\ \angle(\vec{b};\ \vec{c}) = 60°$
26	$(\vec{c} - \overrightarrow{2a}) \cdot 2\vec{b}$, если $\lvert\vec{a}\rvert = 1,\ \lvert\vec{b}\rvert = 1,\ \lvert\vec{c}\rvert = 5,\ \angle(\vec{a};\vec{b}) = 60°,\ \angle(\vec{b};\ \vec{c}) = 90°$
27	$(\vec{c} - \overrightarrow{4a}) \cdot \vec{b}$, если $\lvert\vec{a}\rvert = 2,\ \lvert\vec{b}\rvert = 4,\ \lvert\vec{c}\rvert = 3,\ \angle(\vec{a};\vec{b}) = 90°,\ \angle(\vec{b};\ \vec{c}) =45°$
28	$(\vec{c} - \overrightarrow{5a}) \cdot 2\vec{b}$, если

	$\lvert\vec{a}\rvert = 3,\ \lvert\vec{b}\rvert = 2,\ \lvert\vec{c}\rvert = 1,\ \angle(\vec{a};\vec{b}) = 30^\circ,\ \angle(\vec{b};\vec{c}) = 45^\circ$
29	$\overrightarrow{(\vec{c} - 2a)} \cdot 3\vec{b}$, если $\lvert\vec{a}\rvert = 3,\ \lvert\vec{b}\rvert = 3,\ \lvert\vec{c}\rvert = 2,\ \angle(\vec{a};\vec{b}) = 30^\circ,\ \angle(\vec{b};\vec{c}) = 60^\circ$
30	$\overrightarrow{(\vec{c} - 2a)} \cdot 3\vec{b}$, если $\lvert\vec{a}\rvert = 3,\ \lvert\vec{b}\rvert = 4,\ \lvert\vec{c}\rvert = 1,\ \angle(\vec{a};\vec{b}) = 60^\circ,\ \angle(\vec{b};\vec{c}) = 90^\circ$
31	$\overrightarrow{(\vec{c} - 4a)} \cdot \vec{b}$, если $\lvert\vec{a}\rvert = 1,\ \lvert\vec{b}\rvert = 4,\ \lvert\vec{c}\rvert = 3,\ \angle(\vec{a};\vec{b}) = 90^\circ,\ \angle(\vec{b};\vec{c}) = 45^\circ$
32	$\overrightarrow{(\vec{c} - 5a)} \cdot 2\vec{b}$, если $\lvert\vec{a}\rvert = 3,\ \lvert\vec{b}\rvert = 1,\ \lvert\vec{c}\rvert = 5,\ \angle(\vec{a};\vec{b}) = 30^\circ,\ \angle(\vec{b};\vec{c}) = 45^\circ$

8. Решить задачу:

1	Дан ΔАВС. Найти периметр треугольника, длину медианы ВМ и угол А, если А(2; -2; 1), В(-3;5; 2), С(4; 3; - 1)
2	Дан ΔАВС. Найти периметр треугольника, длину медианы ВМ и угол А, если А(-4;-2; 1), В(-3;1; - 1), С(5; 3; 2)
3	Дан ΔАВС. Найти периметр треугольника, длину медианы ВМ и угол А, если А(0; 6; - 2), В(-3;5; 1), С(-1; 0; 3)
4	Дан ΔАВС. Найти периметр треугольника, длину медианы ВМ и угол А, если А(4; 0; 1), В(2;-3; 4), С(-4; - 2; 0)
5	Дан ΔАВС. Найти периметр треугольника, длину медианы ВМ и угол А, если А(3;-2; 1), В(-3; 0; -1), С(0; 3; 4)
6	Дан ΔАВС. Найти периметр треугольника, длину медианы ВМ и угол А, если А(-4;-2; 3), В(-3;2; - 1), С(2; 3; - 2)
7	Дан ΔАВС. Найти периметр треугольника, длину медианы ВМ и угол А, если А(0; 4; 1), В(2;5; - 1), С(1; -1; 4)
8	Дан ΔАВС. Найти периметр треугольника, длину медианы ВМ и угол А, если А(4;3; - 1), В(2;-1; 0), С(-4; 1; - 3)
9	Дан ΔАВС. Найти периметр треугольника, длину медианы ВМ и угол А, если А(3; -2; 1), В(-3;5; 1), С(4; 3; - 4)
10	Дан ΔАВС. Найти периметр треугольника, длину медианы ВМ и угол А, если А(-2;-2; 1), В(-3;0;- 1), С(5; 1; 2)
11	Дан ΔАВС. Найти периметр треугольника, длину медианы ВМ и угол А, если А(0; 1; - 2), В(-3;5; 2), С(-1; 2; 3)
12	Дан ΔАВС. Найти периметр треугольника, длину медианы ВМ и угол А, если А(- 1; 0; 1), В(3;-3; 4), С(-2; - 2; 0)
13	Дан ΔАВС. Найти периметр треугольника, длину медианы ВМ и угол А, если А(2;-2; 1), В(-3; 1; -1), С(0; 3; 2)
14	Дан ΔАВС. Найти периметр треугольника, длину медианы ВМ и угол А, если А(-1;-2; 3), В(-3;0; - 1), С(2; 3; - 3)
15	Дан ΔАВС. Найти периметр треугольника, длину медианы ВМ и угол А, если А(1; 4; 1), В(2;3; - 1), С(1; -1; - 2)
16	Дан ΔАВС. Найти периметр треугольника, длину медианы ВМ и угол А, если

	A(4;1; - 1), B(2;-1; 1), C(-2; 1; - 3)
17	Дан ΔABC. Найти периметр треугольника, длину медианы BM и угол A, если A(3; -2; 1), B(-3;4; 2), C(4; 2; - 1)
18	Дан ΔABC. Найти периметр треугольника, длину медианы BM и угол A, если A(-1;-2; 1), B(-3;2; - 1), C(5; 3; 3)
19	Дан ΔABC. Найти периметр треугольника, длину медианы BM и угол A, если A(- 1; 6; - 2), B(-3;2; 1), C(-1; 0; - 3)
20	Дан ΔABC. Найти периметр треугольника, длину медианы BM и угол A, если A(4; 1; 1), B(2;-3; - 1), C(-2; - 2; 0)
21	Дан ΔABC. Найти периметр треугольника, длину медианы BM и угол A, если A(1;-2; 1), B(-3; 2; -1), C(0; 3; - 3)
22	Дан ΔABC. Найти периметр треугольника, длину медианы BM и угол A, если A(-1;-2; 3), B(-3;-2; 1), C(2; 3; - 4)
23	Дан ΔABC. Найти периметр треугольника, длину медианы BM и угол A, если A(0; - 1; 1), B(3;5; - 1), C(1; -1; 3)
24	Дан ΔABC. Найти периметр треугольника, длину медианы BM и угол A, если A(2;3; - 1), B(2;-2; 0), C(-4; 1; - 1)
25	Дан ΔABC. Найти периметр треугольника, длину медианы BM и угол A, если A(-2; -2; 1), B(-3;2; 2), C(4; 3; - 2)
26	Дан ΔABC. Найти периметр треугольника, длину медианы BM и угол A, если A(-1;-2; 1), B(-3;2; - 1), C(5; 3; 3)
27	Дан ΔABC. Найти периметр треугольника, длину медианы BM и угол A, если A(0; 2; - 2), B(-1;5; 1), C(-1; 0; 2)
28	Дан ΔABC. Найти периметр треугольника, длину медианы BM и угол A, если A(4; - 1; 1), B(1;-3; 4), C(-4; - 3; 0)
29	Дан ΔABC. Найти периметр треугольника, длину медианы BM и угол A, если A(3;-2; 2), B(-2; 0; -1), C(0; 3; - 2)
30	Дан ΔABC. Найти периметр треугольника, длину медианы BM и угол A, если A(-1;-2; 3), B(-3;0; - 1), C(2; 3; - 3)
31	Дан ΔABC. Найти периметр треугольника, длину медианы BM и угол A, если A(0; - 2; 1), B(2;2; - 1), C(1; -1; 3)
32	Дан ΔABC. Найти периметр треугольника, длину медианы BM и угол A, если A(1;3; - 1), B(2;-4; 0), C(-4; 1; - 1)

4. Литература

Основная литература:

Лисичкин В. Т. Математика в задачах с решениями: учебное пособие / В Т. Т. Лисичкин, И. Л. Соловейчик. 7-е изд., стер. – Санкт – Петербург: Лань, 2020.-464 с. ЭБС Лань.

Дополнительная литература:

Дадаян А. А. Математика: Учебник / А.А. Дадаян. - 3-е изд. - М.: Форум: НИЦ ИНФРА-М, 2021. - 544 с. ЭБС znanium