ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА
Улан-Удэнский колледж железнодорожного транспорта -
филиал Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Иркутский государственный университет путей сообщения»
(УУКЖТ ИрГУПС)

Н.В.Дубович

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

по выполнению контрольной работы

дисциплины ЕН.01 Прикладная математика

для специальности

08.02.10 Строительство железных дорог, путь и путевое хозяйство

Базовая подготовка

среднего профессионального образования

Заочная форма обучения

Улан-Удэ 2024

УДК 51 (07)

ББК 22.1

Д-796

Дубович Н.В.

Д-796 **ЕН.01 Математика**: Методические указания по выполнению контрольной работы для обучающихся среднего профессионального образования заочной формы обучения специальности 08.02.10 Строительство железных дорог, путь и путевое хозяйство / Н.В.Дубович; Улан-Удэнский колледж железнодорожного транспорта ИрГУПС. - Улан-Удэ: Сектор информационного обеспечения учебного процесса УУКЖТ ИрГУПС, 2024. – 44с.

Методические указания предназначены для студентов заочной формы обучения по дисциплине «Прикладная математика», для выполнения домашней контрольной работы. Методические указания содержат краткое изложение теоретического материала, решение типовых примеров и задач, охватывающих основные разделы программы.

УДК 51 (07)

ББК 22.1

Рассмотрено и рекомендовано к изданию на заседании Методического совета колледжа протокол № 4 от 04.03.2024

СОДЕРЖАНИЕ

Общие методические указания 4

Теоретический материал…………………………………………5

Раздел 1. Линейная алгебра 5
Раздел 2 Математический анализ 15
Раздел 3. Основные численные методы 32
Задания к контрольной работе………………………………..38
Список использованной литературы 43

Требования к выполнению и оформлению контрольной работы

Методические указания предназначены для студентов заочной формы обучения по дисциплине «Прикладная математика», для выполнения домашней контрольной работы. Методические указания содержат краткое изложение теоретического материала, решение типовых примеров и задач, охватывающих основные разделы программы.

Основное назначение данного пособия состоит в том, чтобы помочь студенту заочной формы обучения самостоятельно справиться с выполнением контрольной работы, научиться решать задачи по всем разделам курса по данным дисциплинам.

1. Контрольная работа выполняется в отдельной тетради школьного формата.
2. На обложке тетради наклеивается информационный лист с указанием: шифра, специальности, фамилии, имени, отчества студента, предмет и номер работы.
3. Работа должна быть выполнена пастой одного цвета, аккуратно и разборчиво.
4. Каждую задачу надо начинать с новой страницы.
5. Решение задач желательно располагать в порядке номеров, указанных в задании, номера задач следует указывать перед условием.
6. Условия задач должны быть обязательно переписаны полностью в контрольную тетрадь.
7. При оформлении записей в тетради необходимо выполнять общие требования к культуре их ведения. Перечислим важнейшие из этих требований:

- необходимо соблюдать абзацы, всякую новую мысль следует начинать с красной строки;
- важные формулы, равенства, определения нужно выделять в отдельные строки. Чтобы сделать их более обозримыми;
- при описании решения задачи краткая запись условия отделяется от решения и в конце решения ставится ответ;
- серьезное внимание следует уделять правильному написанию сокращенных единиц величин;
- необходимо правильно употреблять математические символы.

8. Решения задач должны сопровождаться краткими, но достаточно обоснованными пояснениями, используемые формулы нужно выписывать.

9. Чертежи следует выполнять карандашом с использованием чертежных инструментов, соблюдая масштаб.

10. В конце работы следует указать литературу, которой вы пользовались. Проставить дату выполнения работы и подпись.

11. Если в работе допущены недочеты и ошибки, то студент должен выполнить все указания преподавателя, сделанные в рецензии.

12. Контрольная работа должна быть выполнена в срок (в соответствии с учебным планом).

13. Работа, выполненная не по своему варианту, не учитывается и возвращается студенту без оценки.

14. Студент, не имеющий зачета по контрольной работе, к экзамену не допускается.

15. Во время экзамена зачтенные контрольные работы представляются преподавателю вместе с данными методическими указаниями.

16. Контрольная работа имеет 4 варианта. Вариант работы выбирается преподавателем.

Теоретический материал

Раздел 1. Линейная алгебра

Комплексные числа

1. Комплексные числа и действия над ними.

Решение многих задач сводится к решению алгебраических уравнений. Поэтому исследование алгебраических уравнений является одним из важнейших вопросов математики.

Действительных чисел недостаточно для того, чтобы решить любое алгебраическое уравнение. Например, уравнение $x^2 + 1 = 0$ не имеет действительных корней. Поэтому приходится расширять множество действительных чисел до множества, такого, чтобы в этом множестве уравнение вида $x^2 + a^2 = 0$ имели решения.

Корень уравнения $x^2 + 1 = 0$ или $x^2 = -1$ называется *мнимой единицей* и обозначается i.

Число вида $z = a + bi$, где а и в – любые действительные числа, а i – мнимая единица, определяемая равенством $i^2 = -1$, называется ***комплексным числом***.

Запись комплексного числа в виде $z = a + bi$ называется *алгебраической формой* записи комплексного числа.

Действительное число a называется *действительной частью* комплексного числа *вида* $z = a + bi$, а число bi – *мнимой частью.*

Два комплексных числа $z = a_1 + i\,b_1$ и $z = a_2 + i\,b_2$ считаются **равными**, если соответственно равны их действительные и мнимые части: $a_1 = a_2$, $b_1 i = b_2 i$

Два комплексных числа называют *сопряженными,* если они отличаются друг от друга только знаком перед мнимой частью. Сопряженные комплексные числа обозначают: z и $\bar{z}$. Например, $z_1 = 1 + 2i$ и $\bar{z}_1 = 1 - 2i$;

Действия над комплексными числами, заданными в алгебраической форме

Пусть даны комплексные числа: $z_1 = a + bi$ и $z_2 = c + di$. 1. Сложение $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$.

2. Вычитание $z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i$

3. Умножение

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

4. Возведение комплексного числа в степень производится по формулам возведения двучлена в соответствующую степень, но при этом надо учитывать, что $i^1 = i$, $i^{4n+1} = i^1$, $i^2 = -1$, $i^{4n+2} = i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^{4n+3} = i^2 = -i$, $i^4 = 1$, $i^{4n} = 1$

5. При делении двух комплексных чисел в алгебраической форме, необходимо умножить делимое и делитель на комплексное число, сопряженное делителю.

Пример 1.

1. $z_1 + z_2 = (2 + 3i) + (5 - 7i) = (2 + 5) + (3 - 7)i = 7 - 4i$;

2. $z_1 - z_2 = (2 + 3i) - (5 - 7i) = (2 - 5) + (3 - (-7))i = -3 + 10i$;

3.

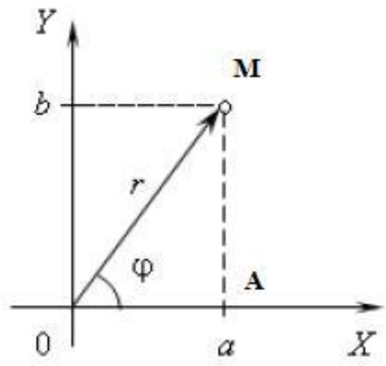
$z_1 \cdot z_2 = (2 + 3i)(5 - 7i) = 10 - 14i + 15i - 21i^2 = 10 - 14i + 15i + 21 = 31 + i$;

4. $(2 + 3i)^2 = 4 + 2 \cdot 2 \cdot 3i + 9i^2 = 4 + 12i - 9 = -5 + 12i$ **;**

$(3 + 5i)^3 = 125 + 3 \cdot 25 \cdot 3i + 3 \cdot 5 \cdot 9i^2 + 27i^3$ **,** так как $i^2 = -1$, $i^3 = -i$,
то получим $(3 + 5i)^3 = 125 + 225i - 135 - 27i = -10 + 198i$

Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа

Любое комплексное число z = $a + bi$ можно изобразить на комплексной плоскости точкой Z с координатами *(a; b)* .*Модулем комплексного числа* называется длина вектора *OM*, изображающего комплексное число на координатной (*комплексной*) плоскости: $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.



Пусть дано комплексное число $z = a + bi$, выразим действительные числа a и b через модуль r и аргумент φ числа z следующим образом: a = r cosφ, b = r sinφ. Таким образом, комплексное число можно записать в виде $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где r- модуль комплексного числа, а φ – один из его аргументов. Представление комплексного числа в указанном виде называется *тригонометрической формой* записи комплексного числа.

Итак, существует три формы записи комплексного числа: $z = a + bi$ - алгебраическая форма; $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ - тригонометрическая форма;

$z = re^{i\varphi}$ - показательная форма.

Правило перехода от алгебраической формы комплексного числа к тригонометрической и показательной:

1. Найти модуль r комплексного числа находим по формуле: $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

2. Изобразить комплексное число на комплексной плоскости и определить четверть, в которой находится точка Z.

3. В зависимости от четверти, найти аргумент φ комплексного числа

4. Записать число в тригонометрической форме, подставив все найденные значения в формулу: $z = r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, в показательной - $z = re^{i\varphi}$.

Пример . Представить в тригонометрической и показательной формах комплексное число z = 3 + $\sqrt{3}$ i.

Решение:

1) находим модуль комплексного числа:

$$a = 3;\ b = \sqrt{3}$$

$$|z| = r = \sqrt{3^2 + \sqrt{3}^2} = 2\sqrt{3}.$$

2) находим главное значение аргумента комплексного числа z: так как вектор, изображающий число z лежит в I четверти и

$$tg(\varphi) = \frac{\sqrt{3}}{3},\ \text{то}\ \varphi = \frac{\pi}{6}.$$

3) находим тригонометрическую форму: $z = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$, находим показательную форму: $z = 2\sqrt{3}\,e^{i\frac{\pi}{6}}$.

Свойства определителей и их вычисление

Содержание материала: *определитель матрицы. Свойства определителей и их вычисление. Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера.*

1.*Матрицей* называется множество чисел, образующих прямоугольную таблицу, которая содержит m строк и n столбцов. Для записи матрицы используется следующее обозначение:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Для любого элемента a_{ij}, первый индекс i означает номер строки, а второй индекс j - номер столбца.

Если число строк матрицы не равно числу столбцов ($m \neq n$), то матрица называется *прямоугольной*. Таковы, например, матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \vdots & \vdots \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}$$

Если число строк равно числу столбцов (m = n), то матрица называется *квадратной*. Например, квадратными являются матрицы:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Число строк или столбцов квадратной матрицы называется ее *порядком*. Так, в последнем примере порядок матрицы A равен 2, а порядок матрицы B равен 3.

Две матрицы называются *равными*, если они имеют одинаковое число строк m и одинаковое число столбцов n и их соответствующие элементы равны. Так, матрицы

A = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ и B = $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$ равны, если $a_{11} = b_{11}$, $a_{12} = b_{12}$, $a_{13} = b_{13}$, $a_{21} = b_{21}$, $a_{22} = b_{22}$, $a_{23} = b_{23}$.

Равные матрицы обязательно либо имеют одно и то же строение: обе они прямоугольные типа того $m \times n$, либо квадратные одного и же порядка n.

<u>Линейные операции над матрицами</u>

Суммой матриц A и B называют такую матрицу, элементы которой равны сумме соответствующих элементов матриц A и B. Складывать можно только матрицы, имеющие одинаковое строение: или прямоугольные типа $m \times n$, или квадратные порядка n.

Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$.

Тогда сумма матриц C = A+B имеет вид:

$$C = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \end{pmatrix}.$$

Пример 1. Сложить матрицы A и B, если:

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$;

б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;

в) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$.

Решение:

а) Здесь A и B - квадратные матрицы второго порядка. Складывая их соответствующие элементы, получим

$$C = A+B = \begin{pmatrix} 2-1 & 4+3 \\ -1+1 & 3-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

б) Здесь A и B - прямоугольные матрицы типа 2×3. Складываем их соответствующие элементы: $C = A + B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 5 & -4 & 7 \end{pmatrix}$.

в) Эти прямоугольные матрицы сложить нельзя, так как A есть матрица типа 3×2, а B - матрица типа 2×3; можно складывать только прямоугольные матрицы одного типа.

Таким образом, сложение матриц сводится непосредственно к сложению их элементов, являющихся числами. Поэтому на сложение матриц распространяется переместительный закон сложения: A+B=B+A.

Произведением матрицы А на число k называется такая матрица kA, каждый элемент которой равен ka_{ij}, т. е. если А = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, то кА = $\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{pmatrix}$.

Умножение матрицы на число сводится к умножению на это число всех элементов матрицы.

Пример 2. Умножить матрицу А = $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ на число k = 3.

Решение: Умножая каждый элемент матрицы А на 3, получим:

$$3A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 12 \\ 0 & 15 & -9 \\ -6 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть А = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, В = $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, тогда ***произведением*** этих матриц называется матрица C = AB = $\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$. Чтобы найти элемент c_{11} первой строки и первого столбца матрицы С, нужно каждый элемент первой строки матрицы А (т. е. a_{11} и a_{12}) умножить на соответствующий элемент первого столбца матрицы В (т.е. b_{11} и b_{12}) и полученные произведения сложить; чтобы найти элемент c_{12} первой строки и второго столбца матрицы С, нужно умножить все элементы первой строки (a_{11} и a_{12}) на соответствующие элементы второго столбца (b_{12} и b_{22}) и полученные произведения сложить; аналогично находятся элементы c_{21} и c_{22}.

Пример 3. Найти произведение матриц А и В, если

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение:

$$C = AB = \begin{pmatrix} 3\cdot1+1\cdot2+1\cdot1 & 3\cdot1+1\cdot(-1)+1\cdot0 & 3\cdot(-1)+1\cdot1+1\cdot1 \\ 2\cdot1+1\cdot2+2\cdot1 & 2\cdot1+1\cdot(-1)+2\cdot0 & 2\cdot(-1)+1\cdot1+2\cdot1 \\ 1\cdot1+2\cdot2+3\cdot1 & 1\cdot1+2\cdot(-1)+3\cdot0 & 1\cdot(-1)+2\cdot1+3\cdot1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 8 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Правило нахождения матрицы-произведения распространяется на умножение прямоугольных матриц, при чем справедливы правила:

1) умножение матрицы A на матрицу B имеет смысл только в том случае, когда число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B;

2) в результате умножения двух прямоугольных матриц получается матрица, содержащая столько строк, сколько строк в первой матрице, и столько столбцов, сколько столбцов во второй матрице.

Произведение двух матриц не подчиняется переместительному закону, т. е. $AB \neq BA$.

2. Пусть дана система трех линейных уравнений с тремя переменными x, y, z:

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1; \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2; \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3. \end{cases}$$

Определителем третьего порядка называется число, вычисляемое по правилу:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + b_1 c_2 a_3 - c_1 b_2 a_3 - a_1 c_2 b_3 - a_2 b_1 c_3$$

Правая часть состоит из алгебраической суммы шести членов, из которых три взяты со знаком «плюс», а три со знаком «минус». Со знаком «плюс» входят произведения элементов, лежащих по *главной диагонали,* а также произведения элементов, лежащих на параллелях к этой диагонали, с добавлением третьего множителя из противоположного угла определителя, а со знаком «минус» –

произведения элементов побочной диагонали, а также произведения элементов, лежащих на параллелях к *побочной диагонали*, с добавлением третьего множителя из противоположного угла определителя. Это правило называют ***правилом треугольника***.

Пример 1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -6 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0+18+10-0+1+24=53$.

<u>Алгоритм ршения систем трех уравнений с тремя неизвестными методом Крамера:</u>

1. Вычислить главный определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};$$

2. Вычислить определитель $\Delta x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};$

3. Вычислить определитель $\Delta y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix};$

4. Вычислить определитель $\Delta z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix};$

5. В зависимости от полученных значений определить решение системы исходя из трех возможных случаев:

- если определитель системы $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение: $x = \dfrac{\Delta x}{\Delta}$, $y = \dfrac{\Delta y}{\Delta}$, $z = \dfrac{\Delta z}{\Delta}$;
- если $\Delta = 0$, а Δx, Δy, Δz одновременно не равны нулю (т.е. $\Delta^2 x + \Delta^2 y + \Delta^2 z > 0$), то система не имеет решений;

- если $\Delta = \Delta x = \Delta y = \Delta z = 0$, , то система имеет множество решений.

Пример 1. Решить систему уравнений: $\begin{cases} 2x + 3y + z = 14, \\ 3x - y + 2x = 5, \\ x + 2y - z = 7. \end{cases}$

Решение.

Вычислим главный определитель системы: $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 16$.

Так как $\Delta \neq 0$, система имеет единственное решение. Вычислим теперь Δx , Δy , Δz :

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 14 & 3 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \\ 7 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 32\ ;\quad \Delta y = \begin{vmatrix} 2 & 14 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 48\ ;\quad \Delta z = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 14 \\ 3 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 16 .$$

Подставив найденные определители в формулы Крамера, получим:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{32}{16} = 2\ ;\ y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{48}{16} = 3\ ;\ z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{16}{16} = 1 .$$

Ответ: (2; 3; 1).

Раздел 2. Математический анализ

Дифференциальное и интегральное исчисление

Понятие производной является одним из фундаментальных понятий математики. Многие задачи как самой математики, так и естествознания и техники приводят к этому понятию.

Пусть функция у = *f(x)* определена на некотором промежутке. Возьмем из этого промежутка фиксированное значение аргумента *x* и придадим ему приращение Δх так, чтобы новое значение аргумента *x* + Δ*x* принадлежало этому промежутку. Тогда значение функции *f(x)* заменится новым значением *f(x)* + Δу = *f(x*+Δ*x),* т.е.функция получит приращение Δу = *f(x*+Δ*x)* - *f(x).*

Предел отношения приращения функции Δу к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремиться к нулю называется *производной функции* y = *f(x), т.е*

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Операция нахождения производной называется *дифференцированием.*

Если функция *f(x) имеет производную в точке x,* то она называется *дифференцируемой* в этой точке.

Производная сложной функции

Сложная функция – это функция от функции. Говоря о сложной функции, имеют в виду, что такая функция составлена из нескольких функций, а не какую-то ее особенную сложность. Например, функция y = sin 3x является сложной. Если обозначить 3x = u, то получим sin u, где u – промежуточная функция. В сложную функцию может входить не одна, а несколько промежуточных функций. Например, для функции $y = \cos^2 2x$ промежуточными функциями служат u = cos v и v = 2x..

Производная сложной функции равна произведению ее производной по промежуточному аргументу на производную этого аргумента по независимой переменной:

$$\mathbf{y'(x) = y'(u)\cdot u'(x).}$$

Примеры.

1. $y = (x^2 + 3x)^5$

Решение. Полагая $u = x^2 + 3x$, получим $y = u^5$. По формуле (10) находим $y' = 5(u)^4 (u)' = 5(x^2 +3x)^4 (x^2 +3x)' = 5(x^2 +3x)^4(2x+3)$.

Такая подробная запись производится только в процессе освоения техники дифференцирования. При навыке промежуточные вычисления производятся в уме.

Ответ: $y' = 5(x^2 +3x)^4(2x+3)$.

2. y = sin 3x

Решение. Полагая u =3x , получим y = sin u. По формуле (13)

$y' = \cos u\,(u)' = \cos 3x\cdot(3x)' = 3\cos 3x$.

Ответ: $y' = 3\cos 3x$.

3. y = ln cosx

Решение. Полагая cos x = u; получим y = ln u; По формуле (8)

$$y' = (\ln u)' = \frac{1}{u}\cdot u'$$

$$y' = \frac{1}{\cos x}\cdot(\cos x)' = -\frac{\sin x}{\cos x} = -tgx.$$

Ответ: $y^{|} = -tgx$.

4. $y = 2^{\ln x}$

Решение. Полагая $\ln x = u$, получим $y = 2^{u}$. По формуле (12). $y^{|} = (2^{u})^{|} \cdot = 2^{u} \ln 2 \cdot u^{|}$

$$y^{|} = 2^{\ln x} \cdot \ln 2 \cdot (\ln x)^{|} = 2^{\ln x} \cdot \ln 2 \cdot \frac{1}{x} = \frac{2^{\ln x} \cdot \ln 2}{x};$$

Неопределенный интеграл

1. Основные формулы интегрирования

Функция F(x) называется *первообразной* для функции *f(x)* в промежутке $a \le x \le b$, если в любой точке этого промежутка ее производная равна *f(x):*

$F^{/}(x) = f(x) \Rightarrow dF(x) = f(x)dx,\ a \le x \le b.$

Отыскание первообразной функции по заданной ее производной *f(x)* или по дифференциалу *f(x)dx* есть действие, обратное дифференцированию, - интегрирование.

Совокупность первообразных для функции *f(x)* или для дифференциала *f(x)dx* называется *неопределенным интегралом* и обозначается символом $\int f(x)dx$.

Таким образом $\int f(x)dx = F(x) + C$, если $d(F(x) + C) = f(x)dx$.

Здесь *f(x)* подынтегральная функция; *f(x)dx* – подынтегральное выражение; С – произвольная постоянная.

Основные свойства неопределенного интеграла:

1.Неопределенный интеграл от дифференциала функции равен этой функции плюс произвольная постоянная:

$\int dF(x) = F(x) + C.$

2.Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, а производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$d\int f(x)dx = f(x)dx,\ (\int f(x)dx)^{/} = f(x).$

3.Неопределенный интеграл алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме неопределенных интегралов этих функций:

$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$

4.Постоянный множитель подынтегрального выражения можно выносить за знак неопределенного интеграла:

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx$$

5.Если $\int f(x)dx$=F(x) +C и u = φ (x) – любая известная функция, имеющая непрерывную производную, то $\int f(u)du = F(u) + C.$

Непосредственное интегрирование

Непосредственное интегрирование основано на прямом использовании таблицы интегралов (смотри приложение 5) . Здесь могут представиться следующие случаи:

1)данный интеграл находится непосредственно по соответствующему табличному интегралу

2)данный интеграл после применения свойств 3 и 4 приводится к одному или нескольким табличным интегралам;

3)данный интеграл после элементарных тождественных преобразований над подынтегральной функцией и применения свойств 3 и 4 приводится к одному или нескольким табличным интегралам.

Пример.

Найти следующие интегралы:

1. $\int 5dx$; 2. $\int 4(x^2 - x + 3)$dx ; 3. $\int (4x^3 - 15x^2 + 14x - 3)dx$; 4. $\int \frac{dx}{x^4}$.

1. На основании свойства 4 постоянный множитель 5 выносим за знак интеграла и, используя формулу (1), получим

$$\int 5dx = 5x + C.$$

2.Используя свойство 3 и 4 и формулу (1) и (2), получим

$$\int 4(x^2 - x + 3)dx = 4\int x^2dx - 4\int xdx + 12\int dx =$$

$$= 4 \cdot \frac{x^3}{3} - 4 \cdot \frac{x^2}{2} + 12x + C = \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + 12x + C$$

3.Используя свойство 3 и 4 и формулу (1(и (2), получим

$$\int (4x^3 - 15x^2 + 14x - 3)dx = 4\int x^3dx - 15\int x^2dx + 14\int xdx - 3\int dx =$$

$$= 4\frac{x^4}{4} - 15\frac{x^3}{3} + 14\frac{x^2}{2} - 3x + C = x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 3x + C.$$

4.Используя формулу (2), находим:

$$\int \frac{dx}{x^4} = \int x^{-4}dx = \frac{x^{-4+1}}{-4+1} + C = \frac{x^{-3}}{-3} + C = -\frac{1}{3x^3} + C.$$

Способ подстановки

Этот способ интегрирования предполагает такое преобразование подынтегральной функции, которое позволило бы использовать для решения табличные интегралы.

Этот метод называют также *методом замены переменной.* Он является одним из наиболее эффективных и распространенных приемов интегрирования, позволяющих во многих случаях упростить вычисление интеграла. Он заключается в следующем: заменяют новой переменной такую часть подынтегральной функции, при дифференцировании которой получается оставшаяся часть подынтегрального выражения (не считая постоянного множителя, на который всегда можно умножить и разделить подынтегральное выражение).

Естественно возникает вопрос: как правильно выбрать подстановку? Это достигается практикой в интегрировании. Все же можно установить ряд общих правил и некоторые приемы для частных случаев интегрирования.

Правило интегрирования способом подстановки состоит в следующем:

1. Определяют, к какому табличному интегралу приводится данный интеграл (предварительно преобразовав подынтегральное выражение, если нужно).
2. Определяют, какую часть подынтегральной функции заменить новой переменной, и записывают эту замену.
3. Находят дифференциалы обеих частей записи и выражают дифференциал старой переменной через дифференциал новой переменой.
4. Производят замену под интегралом.
5. Находят полученный интеграл.
6. В результате производят обратную замену, т.е. переходят к старой переменной. Результат полезно проверить дифференцированием.

Примеры.

1.Найти $\int (2+x)^7\,dx$.

$$\int (2+x)^7\,dx = \int t^7\,dt = \frac{t^8}{8} + C = \frac{(2+x)^8}{8} + C.$$

$$\left.\begin{array}{l} 2 + x = t \\ (2+x)'dx = dt \\ \hline dx \quad = dt \end{array}\right|$$

Ответ: $\frac{(2+x)^8}{8}+C$

–

Определенный интеграл

Определение. Если F(x) + C – *первообразная* функция для f(x) , то приращение F(b) –F(a) первообразных функций при изменении аргумента x от x = a до x = b называется *определенным интегралом.*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

где a - нижний предел, а b – верхний предел определенного интеграла.

Для вычисления определенного интеграла *применяется формула*

Ньютона – Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Все методы интегрирования, используемые при нахождении неопределенных интегралов, применяются и при вычислении определенных интегралов. Числовое значение определенного интеграла зависит от вида функции, стоящей под знаком интеграла, и от значений верхнего и нижнего пределов и не зависит от обозначения переменной.

1.Вычисление определенных интегралов по готовым формулам:

1. $\int_0^1 xdx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(1^2-0^2) = \frac{1}{2}.$

2.

$$\int_{-1}^{2}(x^2+2x+1)dx = \left[\frac{1}{3}x^3+x^2+x\right]_{-1}^{2} = \left[\frac{1}{3}\cdot 2^3+2^2+2\right]-\left[\frac{1}{3}(-1)^3+(-1)^2+(-1)\right] = 9.$$

Решить

самостоятельно:

1. $\int_1^2 x^3\,dx;$ 1. $\int_1^3 x^4\,dx$

2. $\int_{-2}^{3}(4x^3-3x^2+2x+1)dx$ 2. $\int_{-1}^{0}(x^3+2x)dx$

3. $\int_0^1 \frac{dx}{x+2}$ 3. $\int_2^3 \frac{dx}{x-1}$

Приложение производной функции и определенного интеграла к решению различных прикладных задач

Решение многих практических задач часто сводится к нахождению наибольшего и наименьшего значений непрерывной на отрезке функции. В курсах анализа доказывается *теорема Вейерштрасса,* утверждающая, что *непрерывная на отрезке* [a;b]*функция* f *принимает на этом отрезке наибольшее и наименьшее значения, т.е.* существуют точки отрезка [a;b], в которых f принимает наибольшее и наименьшее на [a;b] значения.

Для случая, когда функция f не только непрерывна на отрезке [a;b], но имеет на этом отрезке лишь конечное число критических точек, укажем *правило отыскания наибольшего и наименьшего значений* f.

Предположим сначала, что f не имеет на отрезке [a;b] критических точек, тогда f возрастает или убывает на этом отрезке, и, значит, наибольшее и наименьшее значения функции f на отрезке [a;b] – это значения в концах a и b.

Пусть теперь функция f имеет на отрезке [a;b] конечное число критических точек. Эти точки разбивают отрезок [a;b] на конечно число отрезков. Внутри которых критических точек нет. Поэтому наибольшее и наименьшее значения функции f на таких отрезках принимаются в их концах, т.е. в критических точках функции или в точках a и b.

Таким образом, чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции, имеющей на отрезке конечное число критических точек, нужно вычислить значения функции во всех критических точках и на концах отрезка, а затем из полученных чисел выбрать наибольшее и наименьшее.

Схема применимая к решению разнообразных прикладных задач:

1) задача «переводится» на язык функций. Для этого выбирают удобный параметр *x,* через который интересующую нас величину выражают как функцию *f(x);*
2) средствами анализа ищется наибольшее или наименьшее значение этой функции на некотором промежутке;
3) выясняется, какой практический смысл (в терминах первоначальной задачи) имеет полученный (на языке функций) результат.

Вообще решение практических задач средствами математики, как правило, содержит три основных этапа: 1) формализацию (перевод исходной задачи на язык математики); 2) решение полученной математической задачи и 3) интерпретацию найденного решения («перевод» его с языка математики в терминах первоначальной задачи).

Пример **1.** Каковы должны быть размеры прямоугольной комнаты площадью 25м^2, чтобы периметр ее был наименьшим?

Решение. Примем длину комнаты равной *x(м),* тогда ширина равна $\frac{25}{x}$, а периметр

$$y = 2\left(x + \frac{25}{x}\right).$$

Периметр y есть функция длины x, определенная для всех положительных

значений x. Определим интервалы ее возрастания и убывания.

Находим производную: $y' = \frac{2(x-5)(x+5)}{x^2}$. Так как знаменатель больше нуля и длина x положительна, то знак производной определяется знаком разности (x-5). Таким образом, периметр прямоугольника имеет наименьшее значение (минимум), если длина прямоугольника 5м и ширина $\frac{25}{5}$= 5 м, т.е. когда комната имеет квадратную форму.

Ответ: P= 20м

Пример 2. Из листа железа размером 1,5 ×1,5м^2 вырезают по углам квадраты. Чтобы при сметании получить емкость. Какой длины должны быть стороны вырезанных квадратов, чтобы получить емкость с наибольшим объемом?

Решение .Обозначим сторону вырезанного квадрата через *x*, тогда сторона основания емкости будет равна 1,5 – 2x, объем емкости

$$V = S_{осн} \cdot H = (1,5 - 2x)^2 \cdot x = 2,25x - 6x^2 + 4x^3.$$

Найдем первую производную $V^{/} = 12x^2 - 12x + 2,25$.

Найдем точки экстремумов $V^{/} = 0$; $12x^2 - 12x + 2,25 = 0$; $x = 0,25$; $x = 0,75$.

Найдем вторую производную $V^{//} = 24x - 12$; $V^{//}(0,25) < 0$, $V^{//}(0,75) > 0$.

При x = 0,25 имеем максимум, следовательно сторона вырезанного квадрата равна 0,25м.

Ответ: сторона вырезанного квадрата равна 0.25.

Обыкновенные дифференциальные уравнения

Понятие о дифференциальном уравнении

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее между собой независимую переменную x , искомую функцию y и ее производные или дифференциалы.

Символически дифференциальное уравнение записывается так:

$$F(x,y,y^{/}) = 0, \; F(x,y,y^{//}) = 0.$$

Дифференциальное уравнение называется *обыкновенным*, если искомая функция зависит от одного независимого переменного.

Порядком дифференциального уравнения называется порядок старшей производной (или дифференциала), входящей в данное уравнение.

Решением (или *интегралом*) дифференциального уравнения называется такая функция, которая обращает это уравнение в тождество.

Общим решением (или общим интегралом) дифференциального уравнения называется такое решение, в которое входит столько независимых произвольных постоянных, каков порядок уравнения. Так, общее решение дифференциального уравнения первого порядка содержит одну произвольную постоянную.

Частным решением дифференциального уравнения называется решение, полученное из общего при различных числовых значенияхпроизвольных постоянных. Значения произвольных постоянных находятся при определенных начальных значениях аргумента и функции.

График частного решения дифференциального уравнения называется *интегральной кривой.*

Общему решению дифференциального уравнения соответствует совокупность (семейство) всех интегральных кривых.

Задача, нахождения частного решения , удовлетворяющих начальным условиям, называется задачей Коши.

1. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными. Однородные уравнения первого порядка.

Дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение, в которое входят производные (или дифференциалы) не выше первого порядка.

Дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными называется уравнение вида $\frac{dy}{dx} = f(x)\varphi(y)$.

Для решения этого уравнения нужно сначала разделить переменные:

$$\frac{dy}{\varphi(y)} = f(x)dx,$$

а затем проинтегрировать обе части полученного равенства:

$$\int \frac{dy}{\varphi(y)} = \int f(x)dx.$$

Решить уравнения:

1. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$3dx - y^2dy + xdx = 0;$$

Чтобы произвести разделение переменных, надо сгруппировать члены с dx и записать полученные функции в разных частях равенства:

$y^2dy = (3 + x)\,dx;$ Получим уравнение с разделяющими переменными, интегрируем:

$\int y^2 dy = \int (3+x)dx$; $\frac{y^3}{3} = 3x + \frac{x^2}{2} + C$; $\frac{y^3}{3} - 3x - \frac{x^2}{2} = C$;

Общее решение данного уравнения.

Ответ: $\frac{y^3}{3} - 3x - \frac{x^2}{2} = C$;

2. Найти общее решение дифференциального уравнения: 1 + y – xy$^/$ = 0:

Заменим y$^/$ на $\frac{dy}{dx}$, получим $1 + y - x\frac{dy}{dx} = 0$:

Умножим все члены на dx dx + ydx – x dy = 0;

Сгруппируем члены с dx . (1 + y) dx – x dy = 0;

Запишем полученные функции в разных частях равенства:

x dy = (1 + y) dx; разделив переменные имеем: $\frac{dy}{1+y} = \frac{dx}{x}$;

Интегрируем обе части полученного уравнения

$\int \frac{dy}{1+y} = \int \frac{dx}{x}$; ln(1+y) = lnx + lnC; ln(1+y) = ln (xC);

1 + y = x · C ; y = x · C – 1; Общее решен ие уравнения.

Ответ: y = x · C – 1.

3.Найти общее решение уравнения x (1 + y^2)dy = ydy.

Разделив переменные, имеем

$$xdx = \frac{ydy}{1+y^2}$$

Интегрируем обе части полученного уравнения:

$$\int xdx = \int \frac{ydy}{1+y^2}; \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}\ln(1+y^2) + \frac{1}{2}\ln C.$$

Так как произвольная постоянная C может принимать любые числовые значения, то для удобства дальнейших преобразований вместо C мы написали $\frac{1}{2}\ln C$.

Потенцируя последнее равенство, получим

$$x^2 = \ln (C(1+y^2))$$

Это и есть общее решение данного уравнения.

Ответ: $x^2 = \ln(C(1 + y^2))$

4. Найти частное решение уравнения, удовлетворяющее указанным начальным условиям:

$\frac{dy}{x-1} = \frac{dx}{y-2}$; $y = 4$ при $x = 0$.

Разделив переменные, имеем

$$(y-2)\,dy = (x-1)\,dx;$$

Интегрируем обе части полученного уравнения:

$$\int (y-2)dy = \int (x-1)dx; \qquad \int ydy - \int 2dy = \int xdx - \int dx;$$

$$\frac{y^2}{2} - 2y = \frac{x^2}{2} - x + C;$$

Это общее решение данного уравнения.

Для нахождения значения произвольной постоянной С подставим значения

У = 4: х = 0; $\frac{4^2}{2} - 2 \cdot 4 = \frac{0^2}{2} - 0 + C$; 8 – 8 = 0 – 0 + С; С = 0;

Следовательно, искомое частное решение, удовлетворяющее указанным начальным условиям, имеет вид $y^2 - 4y = x^2 - 2x$; $x^2 - y^2 + 4y - 2x = 0$.

Ответ: $x^2 - y^2 + 4y - 2x = 0$.

На основании решенных примеров очевиден алгоритм решения дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.

-Выражают производную функции через дифференциалы dx и dy.

-Члены с одинаковыми дифференциалами переносят в одну сторону равенства и выносят дифференциал за скобку.

-Разделяют переменные.

-Интегрируют обе части равенства и находят общее решение.

-Если заданы начальные условия, то находят частное решение. В зависимости от вида уравнения некоторые пункты алгоритма решения могут быть опущены.

2. **Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.**

1. дифференциальное уравнение (по определению) обязательно содержит производные или дифференциалы искомой функции;

2. уравнение второго порядка содержит производную, наивысший порядок которой равен 2;

3. это уравнение – линейное относительно искомой функции и ее производных, т.е. содержит их в первой степени;

4. это – уравнение с постоянными коэффициентами; значит, коэффициенты при функции и ее производных являются постоянными величинами.

Учитывая все это, можно сказать, что рассматриваемое уравнение содержит y, y′, y″ в первой степени и коэффициенты при них – постоянные величины.

Коэффициенты при y″ всегда можно сделать равным единице, полученные при этом коэффициенты при y′ и y обозначим через p и q. Тогда получим уравнение вида

$$y'' + py' + qy = f(x). \qquad (1)$$

где p и q – постоянные величины, а f(x)- непрерывная функция x.

Если правая часть уравнения (1) равна нулю, т. е. $y'' + py' + qy = 0$, то оно называется уравнением без правой части или однородным уравнением.

Определение1. ***Линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида*** **$y'' + py' + qy = 0$*, где p и q – постоянные величины.***

Напомним, что общее решение дифференциального уравнения второго порядка содержит две произвольные постоянные.

Для того, чтобы найти общее решение уравнение $y'' + py' + qy = 0$, имеющее вид $y = C_1y_1 + C_2y_2$, нужно найти два линейно независимых частных решения y_1 и y_2.

Функция вида $y = e^{kx}$ является решением рассматриваемого уравнения тогда и только тогда, когда число k является корнем квадратного уравнения

$$k^2 + pk + q = 0,$$

которое называется *характеристическим уравнением*Решения уравнения в зависимости от значений корней k_1 и k_2

характеристического уравнения имеют следующий вид:

$y = C_1e^{k_1 x} + C_2e^{k_2 x}$, если k_1, k_2 – действительны и $k_1 \neq k_2$; $y = (C_1 + C_2 x)e^{k_1x}$, если $k_1 = k_2$;

$y = e^{ax} (C_1 \cos bx + C_2 \sin bx)$, если $k_1 = a + bi$, $k_2 = a – bi$.

Пример1. Найти решение задачи Коши:

$$y'' + 4y = 0,\ y(\pi/4) = 1,\ y'(\pi/4) = -2.$$

Решение.

Данное уравнение является линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Составим характеристическое уравнение $k^2 + 4 = 0$. Дискриминант уравнения D = -16 <0. Следовательно, корни характеристического уравнения $k_1 = 2i$, $k_2 = -2i$ и решения уравнения имеют вид $y = C_1\cos2x + C_2\sin2x$.

Воспользовавшись начальными условиями, значения постоянных C_1 и C_2 определим из системы уравнений

$$0\cdot C_1 + 1\cdot C_2 = 1,$$
$$-2\cdot 1\cdot C_1 + 2\cdot C_2\cdot 0 = -2.$$

Имеем $C_1 = 1$, $C_2 = 1$.

Искомое решение $\mathbf{y = \cos2x + \sin2x}$.

Пример 2. Решите уравнение: $y'' - y' -2y = 0$.

Данное уравнение является линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Составим характеристическое уравнение $k^2 – k – 2 = 0$. Дискриминант уравнения D = 9.

Следовательно, корни характеристического уравнения $k_1= -1$, $k_2 = 2$ и решения уравнения имеют вид

$$y = C_1e^{2x} + C_2e^{-x}.$$

Пример 3. Решите уравнение: $y'' - 10 y' + 25y = 0$.

Данное уравнение является линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Составим характеристическое уравнение $k^2 – 10 k + 25 = 0$. Дискриминант уравнения

D = 0. Следовательно, корни характеристического уравнения $k_1= k_2 = 5$ и решения уравнения имеют вид

$$У = (C_1 + C_2x)\, e^{5x}.$$

Ряды

Числовым рядом называется сумма вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$$

где числа u_1, u_2, u_3, …,u_n, … называемые *членами ряда*, образуют бесконечную последовательность; член u_n называется *общим членом ряда*.

Суммы $S_1 = a_1$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

……………………

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \quad + a_n$$

составленные из первых членов ряда, называются частичными суммами этого ряда.

Каждому ряду можно сопоставить последовательность частичных сумм

S_1, S_2, S_3, …, S_n, … . Если последовательность (S_n) сходится , т.е. имеет предел: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, то числовой ряд называется *сходящимся,* а S – суммой ряда. В противном случае ряд называется *расходящимся.*

1.**Необходимый признак сходимости ряда.**

Ряд $\sum\limits_{n\to 1}^{n\to\infty} u_n$ может сходиться только при условии, что его общий член u_n при неограниченном увеличении номера n стремиться к нулю;

$$\sum_{n\to 1}^{n\to\infty} u_n = 0 .$$

Если $\sum\limits_{n\to 1}^{n\to\infty} u_n \neq 0$, то ряд $\sum\limits_{n\to 1}^{n\to\infty} u_n$ расходится – это достаточный признак расходимости ряда.

Достаточные признаки сходимости ряда с положительными членами.

1.Признак сравнения рядов с положительными членами.

Исследуемый ряд сходится, если его члены не превосходят соответствующих членов другого, заведомо сходящегося ряда; исследуемый ряд расходится, если его члены превосходят соответствующие члены другого заведомо расходящегося ряда.

2. Признак Даламбера.

Если для ряда с положительными членами

$$\sum_{n\to 1}^{n\to\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + u_{n+1} + \ldots (u_n \quad 0)$$

Выполняется условие $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, то ряд сходится при l<1 и расходится при l>1

Признак Даламбера не дает ответа, если l=1. В этом случае для исследования ряда применяются другие приемы.

3. Знакопеременные и знакочередующиеся ряды. Абсолютная и условная сходимость. Признак сходимости Лейбница для знакочередующихся рядов.

Числовой ряд $u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots$ называется *знакопеременным,* если среди его членов имеются как положительные, так и отрицательные числа.

Числовой ряд $u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots$называется *знакочередующимся,* если любые два стоящие рядом члена имеют противоположные знаки. Этот ряд является частным случаем знакопеременного ряда.

Признак сходимости Лейбница для знакочередующихся рядов.

Если члены знакочередующегося рада $u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots$ монотонно убывают по абсолютной величине и общий член u_n стремиться к нулю при $n \to \infty$, то ряд $u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots$ сходится.

Этот признак служит достаточным признаком сходимости знакочередующихся рядов.

Знакопеременный ряд $u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots$называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд $|u_1|+|u_2|+|u_3|+\ldots+|u_n|+\ldots$, составленный из абсолютных величин его членов, т.е. всякий абсолютно сходящийся ряд является сходящимся.

Если знакопеременный ряд $u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots$сходится, а составленный из абсолютных величин его членов ряд

$|u_1|+|u_2|+|u_3|+\ldots+|u_n|+\ldots$ расходится, то данный ряд называется *условно* *(неабсолютно) сходящимся.* Заметим, что из расходимости ряда

$|u_1|+|u_2|+|u_3|+\ldots+|u_n|+\ldots$ в общем случае не следует расходимость ряда $u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots$.

Для установления абсолютной сходимости знакопеременного (и знакочередующегося) ряда используются те же признаки, что и для сходимости ряда с положительными членами.

5.Ряд Фурье

Тригонометрическим рядом Фурье для функции *f(x)* в промежутке изменения аргумента

$-\pi \leq x \leq \pi$ называется ряд вида

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \ldots + (a_n \cos nx + b_n \sin nx) + \ldots$$

(1)

Или, короче

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\text{ , } \mathbf{(2)}$$

где $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ коэффициенты ряда, называемые *коэффициентами Фурье*

Коэффициенты ряда Фурье.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

$$b_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nxdx \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Пример.

1. Исследовать сходимость ряда, применяя необходимый признак сходимости и признак сравнения.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1) \cdot 2^n} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 2^2} + \frac{1}{5 \cdot 2^3} + \ldots + \frac{1}{(2n-1) \cdot 2^n} + \ldots;$$

Решение.

Находим $\lim_{n\to\infty} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n-1) \cdot 2^n} = 0$. Необходимый признак сходимости ряда выполняется, но для решения вопроса о сходимости нужно применить один из достаточных признаков сходимости.

Сравним данный ряд с геометрическим рядом

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots,$$ который сходится, так как $q=\frac{1}{2}<1$.

Сравнивая члены данного ряда, начиная со второго, с соответствующими членами геометрического ряда, получим неравенства

$$\frac{1}{3\cdot 2^2}<\frac{1}{2^2};\frac{1}{5\cdot 2^3}\quad\frac{1}{2^3};\ldots;\frac{1}{(2n-1)\cdot 2^n}<\frac{1}{2^n};\ldots,$$

т.е. члены данного ряда, начиная со второго, соответственно меньше членов геометрического ряда, откуда следует, что данный ряд сходится.

2. Исследовать сходимость ряда, используя признак Даламбера.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{5^n}=\frac{2}{5}+\frac{4}{25}+\frac{6}{125}+\ldots+\frac{2n}{5^n}+\ldots;$$

Решение.

Подставив в общий член ряда $\frac{2n}{5^n}$ вместо n число n+1, получим $\frac{2(n+1)}{5^{n+1}}$.

Найдем предел отношения (n+1) -го члена к n - му члену при $n\to\infty$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2(n+1)}{5^{n+1}}:\frac{2n}{5^n}=\frac{n+1}{5n}=\frac{1}{5}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{5}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{5}<1.$$

Следовательно, данный ряд сходится.

Раздел 5 Основные численные методы

Численное интегрирование

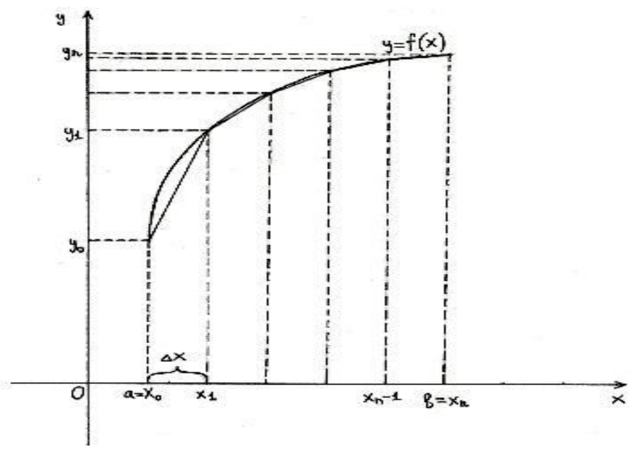
Приближенное вычисление определенных интегралов

Часто приходится вычислять определённые интегралы, для которых невозможно найти первообразную. В этом случае применяют приближённые методы вычисления. Иногда приближённый метод применяют и для “берущихся” интегралов, если вычисление по формуле Ньютона-Лейбница не рационально. Идея приближённого вычисления интеграла заключается в том, что кривая $y = f(x)$ заменяется новой, достаточно “близкой” к ней кривой. В зависимости от выбора новой кривой можно использовать ту или иную приближённую формулу интегрирования. Рассмотрим три приближенных метода: метод прямоугольников, метод трапеций, метод парабол (метод Симпсона).

Метод трапеций

Метод трапеций обычно даёт более точное значение интеграла, чем метод прямоугольников. Криволинейная трапеция заменяется на сумму нескольких трапеций и приближённое значение определённого интеграла находится как сумма площадей трапеций:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+....+y_{n-1}\right)$$



5 dx

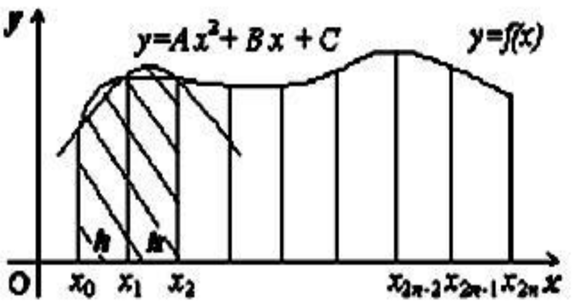
Метод Симпсона

Суть метода заключается в том, что отрезки прямых, ограничивающие элементарные трапеции сверху, заменяют дугами парабол, оси которых параллельны оси Оу. Тогда криволинейную трапецию заменяют не суммой площадей прямолинейных фигур, как в предыдущих методах, а суммой площадей криволинейных трапеций, ограниченных дугами парабол:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{3n}(y_0+y_n+2(y_2+y_4+....+y_{n-2})+4(y_1+y_3+....+y_{n-1}))$$

a

где n - четное число.



Пример 3. Вычислить по формуле Симпсона $\int_1^4 x^2\,dx$.

Решение: Разделим промежуток интегрирования на 10 равных частей. Тогда $\frac{b-a}{3n} = \frac{3}{30} = 0{,}1$. Подставляя в подынтегральную функцию $y = x^2$ значения аргумента: $x_0 = 1$; $x_1 = 1{,}3$; $x_2 = 1{,}6$, …. , $x_{10} = 4$, найдем соответствующие значения ординат $y_0 = 1$, $y_1 = 1{,}69$; $y_2 = 2{,}56$; $y_3 = 3{,}61$; $y_4 = 4{,}84$; $y_5 = 6{,}25$; $y_6 = 7{,}84$; $y_7 = 9{,}61$; $y_8 = 11{,}56$; $y_9 = 13{,}69$; $y_{10} = 16$. Тогда, по формуле Симпсона получим:

$$A_{прибл} = \int_1^4 x^2\,dx \approx 0{,}1\cdot((1+16) + 2(2{,}56 + 4{,}84 + 7{,}84 + 11{,}56) +$$
$$+ 4(1{,}69 + 3{,}61 + 6{,}25 + 9{,}61 + 13{,}69)) = 21.$$

Вычисление по формуле Ньютона Лейбница дает:

$$A_{точн} = \int_1^4 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^4 = \frac{64}{3} - \frac{1}{3} = 21$$

Таким образом, при вычислении определенного интеграла по формуле Симпсона получено точное значение интеграла.

Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений

Содержание материала: *понятие о численном решении дифференциальных уравнений. Метод Эйлера для решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Применение метода численного решения дифференциальных уравнений при решении профессиональных задач.*

Приближенное решение дифференциальных уравнений первого порядка методом Эйлера

Рассмотрим метод Эйлера, применяемый при приближенном решении дифференциальных уравнений.

Найдем приближенно решение уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ (1)

на отрезке $[x_0,b]$,удовлетворяющее начальному условию при $x = x_0$, $y=y_0$. Разделим отрезок $[x_0,b]$ точками x_0, x_1, x_2, …,x_n = b на n равных частей (здесь $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$). Обозначим $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \ldots = b - x_{n-1} = \Delta x = h$, следовательно, $h = \frac{b - x_0}{n}$.

Пусть $y = \varphi(x)$ есть некоторое приближенное решение уравнения (1) и

$y_0 = \varphi(x_0)$, $y_1 = \varphi(x_1)$, $y_2 = \varphi(x_2)$, …, $y_n = \varphi(x_n)$,

Обозначим $\Delta y_0 = y_1 - y_0$, $\Delta y_1 = y_2 - y_1$, …, $\Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1}$.

В каждой из точек x_0, x_1, x_2, …,x_n в уравнении (1) производную заменим отношением конечных разностей:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f(x, y), \qquad (2)$$

$$\Delta y = f(x,y)\Delta x \qquad (3)$$

При $x = x_0$ будем иметь $\frac{\Delta y_0}{\Delta x} = f(x_0, y_0)$, $\Delta y_0 = f(x,y)\,\Delta x$ или $y_1 - y_0 = f(x_0, y_0)h$.

В этом равенстве x_0, y_0, h известны, следовательно, находим: $y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)h$.

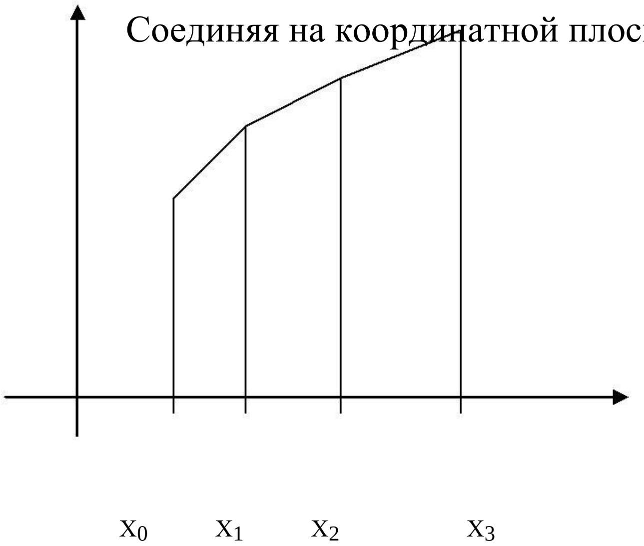
При $x = x_0$ уравнение (3) примет вид $\Delta y_1 = f(x_1, y_1)\,h$ или $y_2 - y_1 = f(x_1, y_1)\,h$, $y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)\,h$.

Здесь известными являются x_1, y_1, h, а y_2 определяется. Аналогично находим;

$$y_3 = y_2 + f(x_2, y_2)\,h.$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y_{k+1} = y_k + f(x_k, y_k)\,h.$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})\,h.$$

Таким образом, приближенные значения решения в точках $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ найдены.

Соединяя на координатной плоскости точки (x_0,y_0), $(x_1,y_1),\ldots, (x_n,y_n)$, отрезками прямой, получим ломаную-приближенное изображение интегральной кривой (рис.1)



Эта ломаная называется ломаной Эйлера.

Пример1. Найти приближенное при $x = 1$ значение решения уравнения $y' = y + x$, удовлетворяющего начальному условию: при $x_0 = 0$ $y_0 = 1$.

Решение: Разделим отрезок [0,1] на 10 частей точками $x_0 = 0$; 0,1; 0,2; …, 1. Следовательно, $h = 0{,}1$.

Значения $y_1, y_2, \ldots, y_n$ будем искать по формуле(3)

$\Delta y_k = (y_k + x_k)h$ или

$y_{k+1} = y_k + (y_k + x_k)h$

Таким образом, получаем:

$y_1 = 1 + (1 + 0)\cdot 0{,}1 = 1 + 0{,}1 = 1{,}1$,

$y_2 = 1{,}1 + (1{,}1 + 0.1)\cdot 0{,}1 = 1{,}21$

В процессе решения составляем таблицу:

$x_к$	$y_к$	$y_К + x_К$	$\Delta y_К = (y_К + x_К)\cdot h$
$x_0 = 0$	1,000	1,000	0,100
$x_1 = 0,1$	1,100	1,200	0,120
$x_2 = 0,2$	1,220	1,420	0,142
$x_3 = 0,3$	1,362	1,620	0,162
$x_4 = 0.4$	1,524	1,924	0,1924
$x_5 = 0,5$	1,7164	2,2164	0.2216
$x_6 = 0,6$	1,9380	2,5380	0,2538
$x_7 = 0,7$	2,1918	2,8918	0,2812
$x_8 = 0.8$	2,4730	3,2730	0,3273
$x_9 = 0,9$	2.8003	3.7003	0,3700
$x_{10} = 1.0$	3.1703		

Мы нашли приближенное значение $y|_{x=1} = 3,1703$. точное решение данного уравнения. Удовлетворяющее указанным начальным условиям, будет $y = 2\ell^x - x - 1$.

Следовательно, $y|_{x=1} = 2\,(\ell - 1) = 3,4365$ Абсолютная погрешность; 0,2662; относительная погрешность

$$\frac{0,2662}{3,4365} = 0,077 \approx 8\%$$

Задания к контрольной работе

Вариант 1

1. Найти частные производные :$z = x^3 + 2x^5y + 6y^3$, $\frac{\partial z}{\partial x}$. $\frac{\partial z}{\partial y}$
2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:
   $y = 2x+1$, $x = 1$, $x = 3$, $y = 0$
3. Представьте число в показательной форме: $z = -4\sqrt{3} + 4i$
4. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n-2}\right)^{2n}$
5. Найти $f'\left(\frac{3\pi}{2}\right)$, если $f(x) = \text{ctg}x + 4x$
6. Вычислить: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^3 + x^2 - 1}{x^2 - x + 3}$

Вариант 2

1. Исследовать ряд на сходимость по признаку Даламбера:
   $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^2}$
2. Исследовать функцию на экстремумы $y = x^3 - 2x^2 - 4x + 3$
3. Дана функция $f(x) = 1 - 5x + 3x^2$. Найдите координаты точки ее графика, в которой угловой коэффициент касательной к нему равен 1
4. Найдите наименьшее значение функции $f(x) = 3x^2 + 18x + 7$ на промежутке [-5; -1]
5. Вычислите: $\int_0^2 (x^2 + x + 1)dx$
6. Вычислить: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2 + 6x^4}{9x^3 + 5x^4}$

Вариант 3

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:
   $y = \frac{1}{2}x^3$, $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$
2. Вычислите: $\int \frac{x^2 + x}{x^2} dx =$
3. Вычислите значение производной функции
   $y = e^x \sin x + x^2$ в точке $x_0 = 0$.
4. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:
   $y = \frac{1}{2}x^3$, $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$
5. Найти математическое ожидание M(X) случайной величины, имеющей закон распределения вероятностей:

X	1	5
p	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$

6. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси OX плоской фигуры, ограниченной линиями: $y = x^2$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$

Вариант 4

1. Вычислите: 1) $\int \frac{x^2 - 2x + 2}{2x^3 - 6x^2 + 12x} dx$; 2) $\int \frac{3x^2 - 4x + 1}{x^3 - 2x^2 + x} dx$
2. Вычислить производную для функции $y = 3^{\cos x}$.
3. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:
   $y = 2x+1$, $x = 1$, $x = 3$, $y = 0$
4. Прямоугольный участок площадью 9 м^2. Необходимо обнести колючей проволокой. Какими должны быть длина и ширина участка, чтобы проволоки ушло наименьшее количество и какое?
5. Найти $f'\left(\frac{3\pi}{2}\right)$, если $f(x) = \text{ctg}x + 4x$
6. Написать уравнение касательной к кривой $y = 2x^2 - 12x+20$ в точке $x=4$

ПРИЛОЖЕНИЯ

1.Формулы сокращенного умножения

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
4. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
5. $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
6. $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
7. $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

2.Таблица значений тригонометрических функций

α (rad)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
α (deg)	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
tan α	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
cot α	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	-

3.Таблица арктангенсов

x	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{arctg} x$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$

Таблица производных основных элементарных функций

1. $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$;
2. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$;
3. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$;
4. $(e^x)' = e^x$;
5. $(a^x)' = a^x \ln a$;
6. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$;
7. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$;
8. $(\sin x)' = \cos x$;
9. $(\cos x)' = -\sin x$;
10. $(\mathrm{tg}\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$;
11. $(\mathrm{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$;
12. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
13. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
14. $(\mathrm{arctg} x) = \frac{1}{1+x^2}$;
15. $(\mathrm{ar\ cctg} x) = -\frac{1}{1+x^2}$

5.Табличные интегралы

1. $\int dx = x + C$
2. $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C$
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
4. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$
5. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
6. $\int e^x dx = e^x + C$
7. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
8. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
9. $\int \cos x dx = \sin x + C$
10. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tgx + C$
11. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -ctgx + C$
12. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$
13. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a} + C$
14. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$

Список использованной литературы:

1. Основные источники:
1.1 Богомолов Н.В. Математика: учебник для бакалавров. М.: Юрайт, 2013. или [Электронный ресурс]: Богомолов, Н. В. Математика : учебник для СПО / Н. В. Богомолов, П. И. Самойленко. — 5-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016. — 396 с. — Режим доступа: - URL: https://www.biblio-online.ru/book/F7C570BC-85B6-4E2D-9B5A-4CB297E61C8E
1.2Богомолов Н.В. Практические занятия по математике. М.: Юрайт, 2013. или [Электронный ресурс]: Богомолов, Н. В. Практические занятия по математике в 2 ч. Часть 1 : учебное пособие для СПО / Н. В. Богомолов. — 11-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016. — 285 с. — Режим доступа: - URL: https://www.biblio-online.ru/book/B2077BBB-EF95-4E5F-AFE1-9AAB6EB69A17

2. Дополнительные источники:

2.1 Дорофеева, А. В. Математика. Сборник задач : учебно-практическое пособие для среднего профессионального образования / А. В. Дорофеева. — 2-е изд. — М.: Издательство Юрайт, 2020. — 176 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-08796-3. — URL : https://urait.ru/bcode/449051

2.2 Дегтярева, О.М. Краткий теоретический курс по математике для бакалавров и специалистов: учебное пособие / О.М. Дегтярева, Г.А. Никонова; Министерство образования и науки России, ФГБОУ ВПО «Казанский национальный исследовательский технологический университет». - Казань: Издательство КНИТУ, 2013. - 136 с.: ил. - Библиогр. в кн. - ISBN 978-5-7882-1523-5; То же [Электронный ресурс]. - URL: //biblioclub.ru/index.php?page=book&id=427858

2.3 79Зализняк, В.Е. Теория и практика по вычислительной математике: учебное пособие / В.Е. Зализняк, Г.И. Щепановская; Министерство образования и науки РФ, Сибирский Федеральный университет. - Красноярск: Сибирский федеральный университет, 2012. - 174 с.: табл. - ISBN 978-5-7638-2498-8; То же [Электронный ресурс]. - URL: //biblioclub.ru/index.php?page=book&id=229271

3. Интернет-ресурсы:

3.1ЭБС «Университетская библиотека онлайн»: http://biblioclub.ru/
3.2Электронная библиотечная система «Лань»: http://e.lanbook.com/
3.3Сайт: http:// shool-collection.edu.ru
3.4«Квант». Форма доступа: www.kvant.mirror1.mccme.ru